3. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Informatik A

WiSe 2015/16

Wolfgang Mulzer

Abgabe am 9. November 2015 bis 12 Uhr in die Tutorenfächer

Aufgabe 1 Umgang mit Booleschen Termen *10 Punkte*

(a) Überprüfen Sie, ob der folgende erweiterte Boolesche Term eine Tautologie ist. Verwenden Sie keine Wertetabelle!

$$[(a \vee b) \wedge (a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow c$$

(b) Betrachten Sie den folgenden erweiterten Booleschen Ausdruck:

$$a \Leftrightarrow b \vee \neg c \wedge b.$$

Geben Sie eine vollständige Klammerung und eine Baumdarstellung für diesen Ausdruck an ($\Leftrightarrow$ bindet schwächer als alle anderen Junktoren). Bilden Sie dann die kanonische DNF und die kanonische KNF.

(c) Finden Sie heraus, wie Boolesche Terme in *Haskell* dargestellt werden. Wie werden Junktoren repräsentiert? Was entspricht den Elementaraussagen *true* und *false*?

Aufgabe 2 Funktional vollständige Signaturen *10 Punkte*

(a) In der Vorlesung wurde erwähnt, dass sowohl der NAND-Operator $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$ als auch der NOR-Operator $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$ funktional vollständig ist. Stellen Sie den NOR-Operator mittels des NAND-Operators dar und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass $\{\neg, \Rightarrow\}$ funktional vollständig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\{\Leftrightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

(d) Es ist bekannt, dass $\{\oplus, \neg\}$ nicht funktional vollständig ist. Folgern Sie daraus, dass dann auch $\{\oplus, \neg, \Leftrightarrow, \text{true}\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 3 XOR *10 Punkte*

(a) Beweisen Sie: Die Antivalenz $a \oplus b$ ist kommutativ und assoziativ. Ist sie idempotent?

(b) Betrachten Sie die n-stellige *Paritätsfunktion* $f_n : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ definiert durch $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$. Stellen Sie eine Wertetabelle für f_3 und f_4 auf. Beschreiben Sie mit einem Satz, was f_n tut.

(c) Geben Sie die kanonische DNF und die kanonische KNF für f_4 an. Wie viele Minterme bzw. Maxterme kommen in der kanonischen KNF bzw. DNF für f_n vor? Können Sie eine kürzere DNF finden?

(d) (freiwillig, 5 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass $\{\oplus, \neg\}$ nicht funktional vollständig ist.

Hinweis: Benutzen Sie Assoziativität und Kommutativität von $\oplus$.