Vl. 12.11.2014 Informatik A, Thema: Natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion

Alle aus der Schulmathematik bekannten Aussagen über natürliche Zahlen können aus einigen wenigen Grundannahmen, den **Peano'schen Axiomen**, abgeleitet werden:

- 1. Axiom: 0 ist eine natürliche Zahl.
- 2. Axiom: Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger S(n), der auch eine natürliche Zahl ist.
- 3. Axiom: Aus S(n) = S(m) folgt n = m.
- 4. Axiom: 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 5. Axiom: Jede Menge X, die 0 enthält und für die gilt, dass aus $n \in X$ auch $S(n) \in X$ folgt, enthält alle natürlichen Zahlen.

Achtung: Wir schreiben für den Nachfolger S(n) auch n+1, aber das ist als symbolische Schreibweise und nicht als Anwendung der Operation Addition zu verstehen. Im Gegenteil, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, kann die Addition durch Anwendung der Nachfolgerfunktion rekursiv definiert werden.

Konsequenz 1: Man kann Funktionen $f: \mathbb{N} \to A$ definieren, indem man f(0) festlegt und f(S(n)) auf f(n) zurückführt. Dieses Prinzip der Definition von Funktionen nennt man *Rekursion*.

Beispiel: Um die Addition von natürlichen Zahlen einzuführen, definieren wir für jede fest gewählte Zahl m die Funktion $m+:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, die jedem n aus dem Definitionsbereich die Summe m+n zuordnen soll. Diese Funktion hat die folgende rekursive Definition: m+(0):=m und m+(S(n)):=S(m+n). Das entspricht den Regeln m+0:=m und m+(n+1):=(m+n)+1.

Analog kann man die Multiplikation durch $m \cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $m \cdot (0) := 0$ und $m \cdot (S(n)) := (m \cdot (n)) + m$ definieren, was den Regeln $m \cdot 0 := 0$ und $m \cdot (n+1) := (m \cdot n) + m$ entspricht.

Konsequenz 2: Man kann allgemeine Aussagen über natürliche Zahlen nach dem folgenden Schema beweisen. Eine Aussageform P(x) über dem Bereich der natürlichen Zahlen ist wahr für alle natürlichen Zahlen, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

- 1. P(0) ist wahr.
- 2. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist P(n) wahr, dann ist auch P(n+1) wahr.

Dieses Beweisprinzip nennt man vollständige Induktion.

Die erste Bedingung wird *Induktionsanfang* oder *Induktionsbasis*, die zweite Bedingung *Induktionsschluss* genannt. Dabei heißt P(n) *Induktionsvoraussetzung* oder *Induktionsannahme* und P(n+1) *Induktionsbehauptung*.

<u>Beweis</u>: Sei $W \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, für die P(n) wahr ist. Wegen des Induktionsanfangs ist $0 \in W$. Der Induktionsschritt zeigt, dass falls $n \in W$ gilt, auch $n+1 \in W$. Nach dem 5. Peanoschen Axiom ist $\mathbb{N} \subseteq W$, also $W = \mathbb{N}$.

Es folgen Beispiele für Aussagen, die man mit vollständiger Induktion beweisen kann:

Beispiel 1: Für jede natürliche Zahl $n \ge 0$ ist die Summe der ungeraden Zahlen von 0 bis 2n + 1 gleich $(n + 1)^2$. Es gilt also:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Beweis:

Wir führen einen Beweis mit vollständiger Induktion.

Sei P(n) die Aussage $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$.

Induktionsanfang: P(0) gilt, denn $\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = 1 = (0+1)^2$

Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl und nehmen wir an, dass P(n) gilt. Wir zeigen, dass auch P(n+1) gilt.

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) + (2(n+1)+1)$$

 $\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) + (2(n+1)+1)$ Wir wenden auf den ersten Teil der Summe die Induktionsvoraussetzung an und erhalten durch Vereinfachen: $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

Dies zeigt die Richtigkeit von P(n+1) unter der Annahme der Richtigkeit von P(n) und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir die Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beispiel 2: Für beliebige reelle Zahlen a und $r \neq 1$ und für jede natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

Beweis: Übung

Zwei Varianten des Induktionsprinzips werden häufig verwendet:

- 1. Wird die Induktionsbasis nicht für n = 0 sondern für einen anderen festen Anfangswert k > 0 bewiesen und zeigt man außerdem $\forall n \geq k : P(n) \Rightarrow P(n+1)$, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \ge k$.
- 2. Beim Induktionsschritt ist es erlaubt, nicht nur auf P(n), sondern auf beliebige kleinere Zahlen zurückzugreifen, d.h. an Stelle von $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ zeigt man $P(k) \wedge P(k+1) \wedge ... \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$, wobei k der Anfangswert aus der Induktionsbasis ist. Dieses Prinzip wird verallgemeinerte vollständige Induktion genannt.

Beispiel 3: Jede natürliche Zahl $n \ge 2$ kann man als Produkt von Primzahlen darstellen. Beweis: Wir führen einen Beweis mittels verallgemeinerter vollständiger Induktion. Sei P(n) die Aussage, dass sich n als Produkt von Primzahlen schreiben lässt. (Achtung: Das Produkt kann auch nur aus einem Faktor bestehen.)

Induktionsanfang: P(2) gilt, denn 2 = 2 ist in der geforderten Produktform. Induktionsschritt: Sei n eine beliebige natürliche Zahl und nehmen wir an, dass $P(2) \wedge P(3) \wedge ... \wedge P(n)$ gilt. Wir zeigen, dass dann die Aussage P(n+1) gilt. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: n+1 ist Primzahl. Dann ist die Zahl selbst die gesuchte Faktorisierung.

Fall 2: n+1 ist keine Primzahl. Das heißt: $\exists k, l \in \mathbb{N} : 1 < k, l < n+1 \land n+1 = k \cdot l$. Nach Annahme gibt es für k und für l Primzahlfaktorisierungen:

$$k = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m_k}$$
 und $l = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{m_l}$

wobei alle p_i und q_j Primzahlen sind. Das liefert aber sofort eine Faktorisierung für n+1:

$$n+1=k\cdot l=p_1\cdot\ldots\cdot p_{m_k}\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{m_l}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen ≥ 2 bewiesen.

Manchmal ist es hilfreich, im Induktionsanfang die Aussage für mehrere Werte zu beweisen.

Beispiel 4: Jede natürliche Zahl \geq 12 lässt sich als Summe schreiben, in der alle Summanden 4 oder 5 sind. Formal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 12 \exists k, l \in \mathbb{N} : n = k \cdot 4 + l \cdot 5$$

Beweis: Wir führen einen Beweis mittels verallgemeinerter vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Die Aussagen P(12), P(13), P(14), P(15) gelten.

<u>Induktionsschritt:</u> Wir zeigen für ein beliebiges $n+1 \ge 16$, dass die Aussage P(n+1) aus $P(12) \land P(13) \land ... \land P(n)$ folgt.

Das ist sofort klar, wenn man sich die Aussage P(n+1-4) anschaut. Denn $n-3 \ge 12$ und damit gilt nach Annahme $n-3 = k \cdot 4 + l \cdot 5$ für irgendwelche $k, l \in \mathbb{N}$. Also ist dann $n+1 = (k+1) \cdot 4 + l \cdot 5$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen > 12 bewiesen.

Zum Schluss das Beispiel eines falschen(!) Beweises, das illustriert, dass man im Induktionsschritt die Implikation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ tatsächlich für alle n zeigen muss.

Beispiel 5: In jeder Menge von n > 0 Menschen haben alle das gleiche Geschlecht.

Beweis: Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für n = 1 ist die Aussage tatsächlich richtig!

<u>Induktionsschritt:</u> Nehmen wir an, für ein beliebiges n gilt P(n), und betrachten wir eine (n+1)-elementige Menschenmenge $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{n+1}\}.$

Wir bilden zwei n-elementige Menschenmengen $M_1 = \{m_2, m_3, \dots, m_{n+1}\}$ und $M_2 = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Nach Induktionsannahme haben jeweils in M_1 und in M_2 alle dasselbe Geschlecht. Aber die Menschen in $M_1 \cap M_2$ gehören zu beiden, also haben in der Tat alle n+1 Menschen dasselbe Geschlecht!!

Was ist falsch?: Man mache sich klar, dass die Argumentation im Induktionsschritt nicht für n = 1 funktioniert, denn dann ist $M_1 \cap M_2$ leer. Für größere n funktioniert es, aber dann findet man keinen passenden Induktionsanker! Also haben nicht in jeder Menschenmenge alle das gleiche Geschlecht und das ist gut so...

Man kann mit vollständiger Induktion nicht nur Aussagen über natürliche Zahlen beweisen sondern auch allgemein über induktiv definierte Objekte. Diesen kann man nämlich eine natürliche Zahl als Parameter zuordnen, der sozusagen misst, wie komplex ein gewisses Objekt ist. Prominente Beispiele sind Boolesche Terme mit dem Rang als Parameter oder aber Listen in Haskell. Hier ist die Länge der Parameter. Es gibt die leere Liste [] mit Länge 0 oder aber die Liste hat die Form x:xs und Länge n+1, wenn n die Länge von xs ist.

Definiert man Funktionen für solche Objekte, dann sind diese in der Regel rekursiv und beweist man Eigenschaften für solche Objekte bzw. Funktionen darauf, so ist vollständige Induktion das Mittel der Wahl! Man spricht dann von **struktureller Induktion**. Als Beispiel folgender einfacher Sachverhalt.

Satz: Jeder Boolesche Term über der Variablenmenge X lässt sich semantisch äquivalent mit den Junktoren $\{\neg, \lor\}$ ausdrücken.

Beweis: (Strukturelle Induktion über den Formelrang)

Sei Φ eine Formel und $rg(\Phi)$ ihr Rang.

Induktionsanfang: $rg(\Phi) = 0$

Das heißt $\Phi = x$ für $x \in X$ oder $\Phi = 0$ oder $\Phi = 1$. Da $1 \equiv x \lor \neg x$ und $0 \equiv \neg(x \lor \neg x)$ ist die Aussage für Formeln vom Rang 0 wahr.

Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für alle Formeln vom Rang $\leq n$. Sei Φ eine Formel vom Rang n+1. Wir machen eine Fallunterscheidung nach der möglichen Gestalt von Φ .

Fall 1: $\Phi = \neg \Phi_1$ und $rg(\Phi_1) = n$

Dann gibt es nach Voraussetzung ein Φ_1' über $\{\neg, \lor\}$ mit $\Phi_1 \equiv \Phi_1'$. Also ist $\Phi \equiv \neg \Phi_1'$.

Fall 2: $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ und $rg(\Phi_1) \leq n$, $rg(\Phi_2) \leq n$.

Damit gibt es nach Annahme Terme $\Phi_1' \equiv \Phi_1$ und $\Phi_2' \equiv \Phi_2$ jeweils über den Junktoren $\{\neg, \lor\}$. Damit ist auch $\Phi \equiv \Phi_1' \lor \Phi_2'$ von der gewünschten Gestalt.

<u>Fall 3</u>: $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ und $rg(\Phi_1) \leq n$, $rg(\Phi_2) \leq n$.

Damit gibt es nach Annahme Terme $\Phi_1' \equiv \Phi_1$ und $\Phi_2' \equiv \Phi_2$ jeweils über den Junktoren $\{\neg, \lor\}$.

Für Φ können wir mit der deMorganschen Regel schreiben:

$$\Phi \equiv \neg (\neg \Phi_1' \vee \neg \Phi_2').$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit die Aussage für jeden Booleschen Term. \Box