Berechnungsmodelle
2-Zählermaschinen sind Turing-Vollständig

Benedikt Wieder

January 6, 2015

1 Einleitung

Ein Berechnungsmodell wird als Turing-Vollständig bezeichnet, wenn es in der Lage ist eine Turingmaschine zu simulieren. Dies zeigen wir für eine 2-Zählermaschine wie folgt:

1. Kellerautomaten mit zwei Stapeln können Turingmaschinen simulieren.
2. 3-Zählermaschinen können Kellerautomaten mit zwei Stapeln simulieren.
3. 2-Zählermaschinen können 3-Zählermaschinen simulieren.

2 Kellerautomat mit zwei Stapeln

Satz: Wird eine Sprache L von einer Turingmaschine erkannt, so wird L auch von einem Kellerautomat mit zwei Stapeln erkannt.
Beweisidee:
Man stelle sich vor, dass der erste Stapel alles repräsentiert, was bei der Turingmaschine *links* vom Lese-/Schreibkopf steht und der zweite alles was darunter und rechts davon steht. Wir simulieren die Turingmaschine wie folgt:

1. Wir übertragen das Eingabewort w auf den zweiten Stapel. Dabei liegt das erste Zeichen von w oben auf dem Stapel.
2. Soll ein Symbol X durch Y ersetzt und der Kopf danach nach rechts bewegt werden, so nehmen wir X vom zweiten Stapel und legen Y auf den ersten Stapel.

3. Soll ein Symbol X durch Y ersetzt und der Kopf danach nach links bewegt werden, so nehmen wir das oberste Symbol Z vom ersten Stapel und ersetzen X auf dem zweiten Stapel durch ZY.

4. Befindet sich die simulierte TM in einem *akzeptierenden Zustand* so wird ebenfalls akzeptiert. Ansonsten wird der nächste Schritt simuliert.

3 3-Zählermaschine

Zählermaschinen sind ähnlich aufgebaut wie Kellerautomaten. Der Unterschied ist, dass die Stapel durch Zähler ersetzt werden. Die Zähler enthalten jeweils eine natürliche Zahl. Es kann außerdem entschieden werden, welche Zähler den Wert null haben. Ein Schritt hängt von dem Zustand, dem Eingabesymbol und der Anzahl der Zähler mit Wert null ab. In einem Schritt kann folgendes getan werden:

- Die Maschine wechselt in einen neuen Zustand.

- Die Zähler können unabhängig um 1 erhöht oder verringert werden. Allerdings können Zähler nicht negativ werden. Ein Zähler mit Wert null kann dementsprechend nicht verringert werden.

Satz: Wird eine Sprache L von einer Turingmaschine erkannt, so wird L auch von einer 3-Zählermaschine erkannt.

Beweis:
Sei M ein Kellerautomat mit zwei Stapeln und $L(M)$ die Sprache, die von M erkannt wird. Wir zeigen, dass es eine 3-Zählermaschine S gibt, die $L(M)$ erkennt.

- Die beiden Stapel werden simuliert indem wir Gödelisierung benutzen, um die Zeichen auf den Stapeln mit jeweils natürliche Zahlen zu kodieren.

  - Wir nehmen an, dass das Stapelalphabet von M aus $r-1$ Symbolen besteht. Diesen Symbolen weisen wir nun $1, \ldots, r-1$ zu und stellen den Stapel $X_1, X_2, \ldots, X_3$ (X_1 liegt oben auf dem Stapel) als natürliche Zahl m zur Basis r dar.

$$m = X_n r^{n-1} + X_{n-1} r^{n-2} + ... + X_2 r + X_1 \,.$$

- Den dritten Zähler verwenden wir als Hilfe um die ersten beiden Zähler wie folgt zu modifizieren:

    1. Um ein Element von einem Stapel S zu nehmen, müssen wir m (Wert des entsprechenden Zählers Z) ganzzahlig durch r teilen, wobei der ganzzahlige Rest der Division das oberste Element des Stapels repräsentiert. Wir reduzieren m um r und erhöhen dabei jedes mal den dritten Zähler um 1. Dies wird wiederholt bis $m = 0$. Nun wird Z inkrementiert und zugleich Z_3 dekrementiert bis $Z_3 = 0$.
    2. Um das oberste Element X durch ein Symbol Y zu ersetzen, erhöhen/verringern wir den Wert i des entsprechenden Zählers um die Differenz der Werte von X und Y.
    3. Um ein Element X auf einen Stapel zu legen, müssen wir den repräsentativen Zähler i durch $i{\cdot}r + X$ ersetzen. Zuerst multiplizieren wir i mit r. Dazu verringern wir i wiederholt um 1 und addieren dabei jedes mal r auf den dritten Zähler bis $i = 0$. Nun übertragen wir den Wert des dritten Zählers auf den ursprünglichen und addieren danach X.

- Zuletzt müssen wir noch den Anfangszustand der Stapelmaschine simulieren. Hierzu erhöhen wir die ersten beiden Zähler um den Wert s, wobei s der repräsentative Wert für das Startsymbol ist.

4 2-Zählermaschine

Satz: Wird eine Sprache L von einer Turingmaschine erkannt, so wird L auch von einer 2-Zählermaschine erkannt.

Beweis:
Wir zeigen nun, dass eine 2-Zählermaschine eine 3-Zählermaschine simulieren kann.
Sei M eine 3-Zählermaschine. Die drei Zähler (i, j, k) werden nun als natürliche Zahl m $= 2^i\,3^j\,5^k$ repräsentiert und in einem Zähler gespeichert. Den anderen Zähler benutzen wir für die Multiplikation und Division. Die 3-Zählermaschine M wird wie folgt simuliert:

1. Um die Zähler (i, j, k) von m zu erhöhen, gehen wir wie folgt vor:

    - Um i zu erhöhen multiplizieren wir m mit 2.

- Um j zu erhöhen multiplizieren wir m mit 3.
- Um k zu erhöhen multiplizieren wir m mit 5.

2. Um zu überprüfen ob einer der Zähler von M null ist, müssen wir überprüfen ob m durch die entsprechende Zahl $(2, 3, 5)$ teilbar ist. Dies können wir uns mit Hilfe der endlichen Kontrolle merken.

3. Um die Zähler (i, j, k) von M zu verringern gehen wir wie folgt vor:

   - Um i zu erhöhen teilen wir m durch 2.
   - Um j zu erhöhen teilen wir m durch 3.
   - Um k zu erhöhen teilen wir m durch 5.

5 Quellen

1. Introduction to the Theory of Computation 3rd Edition, Michael Sipser

2. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation Second Edition, John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman

3. Theoretische Informatik - kurzgefasst 4.Auflage, Uwe Schöning