13. Aufgabenblatt zur Vorlesung | WS 2014/15
Helmut Alt

Algorithmen und Programmierung III

Abgabe 30.1.2015, 12 Uhr

Aufgabe 1 *6 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in NP sind:

(a) *gegeben:* ein ungerichteter Graph G
Frage: Lassen sich die Knoten von G mit drei Farben so färben, dass jede Kante zwischen zwei verschiedenfarbigen Knoten verläuft?

(b) *gegeben:* eine natürliche Zahl k in Binärdarstellung
Frage: Ist k zusammengesetzt? (dh. keine Primzahl)
Anmerkung: Die Division zweier n-stelliger Zahlen nach der Schulmethode erfordert $O(n^2)$ Zeit.

(c) *gegeben:* Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $u, v \in V$.
Frage: Liegen u und v in der gleichen Zusammenhangskomponente von G?

Aufgabe 2 *8 Punkte*

Eine Formel $\phi(x_1, ..., x_n)$ in KNF ist offenbar genau dann erfüllbar, wenn $\phi(1, x_2, ..., x_n)$ oder $\phi(0, x_2, ..., x_n)$ erfüllbar ist. Dabei ist $\phi(1, x_2, ..., x_n)$ die aus $\phi(x_1, ..., x_n)$ enstehende Formel, wenn alle Vorkommen von x_1 durch 1 ersetzt werden. Diese kann oft stark vereinfacht werden, steht x_1 in einer Klausel, kann man sie ganz weglassen, steht $\overline{x_1}$ in einer Klausel, kann man dieses Literal aus der Klausel streichen. Zum Beispiel wird für die Formel

$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge \overline{x_3}$,

$\phi(1, x_2, x_3)$ vereinfacht zu

$(\overline{x_2} \vee x_3) \wedge \overline{x_3}$.

Analoges gilt für $\phi(0, x_2, ..., x_n)$. Eine KNF, die keine Klauseln mehr enthält ("leere Konjunktion") ist erfüllbar, eine KNF, die eine leere Klausel enthält ("leere Disjunktion"), ist nicht erfüllbar.

Benutzen Sie diese Überlegungen, um einen rekursiven Entscheidungsalgorithmus für KNF-SAT in Java zu implementieren, der auch ggf die erfüllende Belegung ausgibt. Dabei soll eine einzugebende KNF-Formel codiert sein wie im folgenden Beispiel: $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge \overline{x_2}$ als 1 2 -3, -1 3, -2.

Aufgabe 3 *6 Punkte*

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme NP-vollständig sind:

(a) *gegeben:* Eine Folge $a_1, ..., a_n$ natürlicher Zahlen.
Frage: Kann man die Folge in zwei Teilfolgen aufteilen deren Summen gleich groß sind?
unter der Voraussetzung, dass das Problem SUBSET-SUM NP-vollständig ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Funktion $f(a_1, ..., a_n, b) = (a_1, ..., a_n, s + b, 2s - b)$, wobei $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

(b) *gegeben:* ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es in G eine überdeckende Knotenmenge der Größe k, dh. eine Menge $V' \subseteq V$, so dass jede Kante in E zu mindestens einem Knoten in V' inzident ist?
unter der Voraussetzung, dass das Cliquenproblem NP-vollständig ist.
Hinweis: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Cliquen der Größe k in G und überdeckenden Knotenmengen der Größe $n - k$ im Komplementärgraphen $\overline{G}$?