13. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Algorithmen und Programmierung III

Wolfgang Mulzer WiSe 2013/14

Abgabe am 30. Januar 2014 vor der Vorlesung in die jeweiligen Tutorenfächer

Aufgabe 1 Finden von Senken in Graphen *10 Punkte*

Betrachtet man die Adjazenzmatrixdarstellung eines Graphen $G = (V, E)$, dann haben viele Algorithmen Laufzeit $\Omega(|V|^2)$. Es gibt aber Ausnahmen: Zeigen Sie, dass die Frage, ob ein gerichteter Graph G eine *globale Senke* — einen Knoten vom Ingrad $|V| - 1$ und Ausgrad 0 — hat, in Zeit $O(|V|)$ beantwortet werden kann, selbst wenn man die Adjazenzmatrixdarstellung von G (die ja selbst schon die Größe $\Theta(|V|^2)$ hat) verwendet. Beweisen Sie Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Sei A die Adjazenzmatrix von G und $u \neq v \in V$. Was folgt über u und v, wenn $A_{uv} = 1$ ist? Was, wenn $A_{uv} = 0$ ist?

Aufgabe 2 Kürzeste Wege in DAGs *10 Punkte*

Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter gerichteter azyklischer Graph. Seien $s, t \in V$. Geben Sie einen Algorithmus, der einen kürzesten Weg von s nach t in Zeit $O(|V| + |E|)$ berechnet. Beweisen Sie die Korrektheit und die Laufzeit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 3(b) auf dem 12. Übungszettel und verwenden Sie dynamisches Programmieren.

Aufgabe 3 A^*-Suche *10 Punkte*

Sei G ein gerichteter, gewichteter Graph mit nichtnegativen Kantengewichten. Seien $t \in V$ und $h : V \to \mathbb{R}_0^+$ ein Schätzer für G, so dass $h(t) = 0$ ist.

Zeigen Sie: Wenn h konsistent ist, dann ist $h(v) \leq d_G(v, t)$ für alle $v \in V$. Hierbei bezeichnet $d_G(\cdot, \cdot)$ den kürzeste-Wege-Abstand in G. Gilt auch die Umkehrung?