1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Algorithmen und Programmierung III — WiSe 2013/14

Wolfgang Mulzer

Abgabe am 24. Oktober 2013 in die jeweiligen Tutorenfächer

Aufgabe 1 Rekursionsgleichungen *10 Punkte*

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Lösung (z.B., durch vollständige Induktion).

(a)
$$T(1) = 0, \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \quad \text{für} \quad n > 1.$$
Sie dürfen annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist.

(b)
$$S(1) = 1, \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i) \quad \text{für} \quad n > 1.$$

Aufgabe 2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel *10 Punkte*

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

(a) $P(2)$ ist eine wahre Aussage.
Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

(b) Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.
Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn $x_1, \ldots, x_{n-1}$ schon feststehen?

(c) Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.

(d) Folgern Sie nun die Ungleichung.

Aufgabe 3 Manipulation elementarer Funktionen *10 Punkte*

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a\left(n^{\log_b a}\right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n \log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$

Aufgabe 4 Die inverse schnelle Fouriertransformation (freiwillig) *10 Zusatzpunkte*

(a) Zeigen Sie mit einer Beweismethode Ihrer Wahl, dass für alle $x \neq 1$ und alle $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

(b) Im Folgenden sei $n+1$ eine Zweierpotenz und $\omega \in \mathbb{C}$ eine *komplexe* primitive $(n+1)$-te Einheitswurzel (d.h., $\omega^{n+1} = 1$ und $\omega^k \neq 1$ für $k = 1, \dots, n$). Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n.

In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man schnell die Werte $p(\omega^0)$, $p(\omega^1)$, …, $p(\omega^n)$ ausrechnen kann. Sei $A = (a_{ij})$ die $(n+1) \times (n+1)$ Matrix mit $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

Zeigen Sie, wie man das Ausrechnen von $p(\omega^0)$, $p(\omega^1)$, …, $p(\omega^n)$ als Multiplikation von A mit einem Vektor darstellen kann. Das heißt, finden Sie einen Spaltenvektor $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ mit

$$\begin{pmatrix} p(\omega^0) \\ p(\omega^1) \\ \vdots \\ p(\omega^n) \end{pmatrix} = A \cdot v.$$

(c) Sei $B = (b_{ij})$ die $(n+1) \times (n+1)$ Matrix mit $b_{ij} = \frac{1}{n+1}\omega^{-(i-1)(j-1)}$. Zeigen Sie, dass $B \cdot A = I$ ist, wobei I auf der Diagonale nur Einsen und in den sonstigen Einträgen nur Nullen enthält (die *Einheitsmatrix*). Insbesondere ist $B \cdot A \cdot w = w$, für alle $w \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Hinweis: Verwenden Sie (a) und beachten Sie, dass ω eine $(n+1)$-te Einheitswurzel ist.

(d) Sei nun $p(x)$ ein Polynom vom Grad n, von dem nur die Werte $p(\omega^0)$, $p(\omega^1)$, …, $p(\omega^n)$ bekannt sind. Beschreiben Sie ein Verfahren, um in $O(n \log n)$ Operationen die Koeffizienten von $p(x)$ zu erhalten.

Hinweis: Aufgrund von (c) müssen wir die Matrix B mit einem geeigneten Spaltenvektor multiplizieren. Zeigen Sie, dass dies der Auswertung eines geeigneten Polynoms an den Stellen ω^{-0}, ω^{-1}, …, ω^{-n} entspricht. Gehen Sie analog zur Vorlesung vor, um dies in $O(n \log n)$ Operationen zu bewerkstelligen.

(e) Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome vom Grad n in Koeffizientenform. Skizzieren Sie ein Verfahren, wie man in $O(n \log n)$ Operationen das Produkt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ in Koeffizientenform berechnen kann (*Achtung*: Das Produkt hat Grad $2n$.).