11. Aufgabenblatt vom Freitag, den 18. Januar 2013 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker III

(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Montag, den 28. Januar 2013 , $12^{\underline{00}}$

1. **Verständnis** (2+2 Punkte)
   (a) Sei $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ die lineare Abbildung, die einem Polynom seine zweite Ableitung zuordnet. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von f?
   (b) Für welche Unterräume U eines euklidischen Vektorraums V ist die Orthogonalprojektion von V auf U eine Isometrie?

2. **Nochmal Eigenwerte usw.** (6 Punkte) Berechnen Sie reelle Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zum Endomorhismus des $\mathbb{R}^3$, der durch folgende Matrix repräsentiert wird:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Was folgt für die Diagonalisierbarkeit von A und warum ?

3. **Fibonacci–Zahlen** (10 Punkte)
   Das folgende Ergebnis kennen Sie schon aus MafI I. Interessant ist, wie zum Beweis die Lineare Algebra ins Spiel kommt.
   Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, n > 1$ die Folge der Fibonacci–Zahlen. Ziel ist es, die folgende Formel zu beweisen:
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$
   Finden Sie zunächst eine 2×2–Matrix A, so dass für $n > 0$:
$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie dann eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha > \beta$ und die dazugehörige Transformationsmatrix T mit $A = T^{-1} \cdot D \cdot T$. Jetzt können Sie A^n bestimmen und sollten dann die Formel herleiten können.