7. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 05. Dezemeber 2012 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker III

(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Montag, den 17. Dezember 2012 , $12^{\underline{00}}$

1. **Alte Klausuraufgabe I** (4 Punkte)
   Sei $\mathbb{R}_n[x]$für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ der reelle Vektorraum aller Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + x_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, also Polynome mit Grad höchstens n. Darin betrachten wir die Basis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
   Sei $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ die lineare Abbildung, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.
   Bestimmen Sie die zu D, $D^2 = D \circ D$ und allgemein $D^k = D^{k-1} \circ D$ für $k > 0$ bezüglich obiger Basis gehörende Matrizen.
   Welche Ränge haben diese Abbildungen? Gibt es zu D eine inverse Abbildung, wenn ja wie sieht sie aus, wenn nein warum nicht?

2. **Alte Klausuraufgabe II** (4 Punkte)
   Rechnen Sie zunächst nach, dass die Menge $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie für den Basiswechsel von der Standardbasis in diese Basis B die zugehörige Matrix und die Darstellung (Koordinaten) des Vektors x bezüglich B, wenn der Vektor x bezüglich Standardbasis lautet $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Nennen Sie zwei Möglichkeiten, wie man die zur Umkehrabbildung gehörende Matrix berechnen kann und führen Sie eine davon aus.

3. **Matrixprodukt** (2 Punkte)
   Bestimmen Sie für positive $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

4. **Matrixtyp** (4 Punkte)
   Von welchem Typ (d.h., welche Dimensionen) muss die Matrix X über $\mathbb{R}$ sein, damit die folgende Gleichung sinnvoll ist. Bestimmen Sie dann die Menge aller Matrizen, die dieser Gleichung genügen.
   Hinweis: Auf der rechten Seite der Gleichung steht die 3×2-Nullmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O_{3\times 2}$$

5. **Geometrisches** (4 Punkte)
   Sei wie in der Vorlesung besprochen A_ϕ die zu einer Drehung um den Winkel ϕ in der Ebene gehörende Matrix aus $M(2\times 2, \mathbb{R})$, B_ψ die Matrix der Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\psi/2$.
   Berechnen Sie und interpretieren Sie geometrisch die Produkte $B_\psi \cdot A_\phi$ und $B_\psi \cdot B_\phi$. Was sind die inversen Matrizen zu A_ϕ bzw.B_ψ?