Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

5. Übung

Abgabe: 23.11.2012 bis 10:00 Uhr (26.11.2012 bis 10:00 Uhr für die Mittwochs- und Donnerstagstutorien)

Aufgabe 1: **Relationen** 6 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Relationen $R, S, T \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hinsichtlich der Eigenschaften Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie. Positive Antworten müssen kurz begründet, negative Antworten durch konkrete Gegenbeispiele belegt werden.

$m\,R\,n \iff$ jeder Primteiler von m ist auch ein Teiler von n
$m\,S\,n \iff$ m ist ein echter Teiler von n, d.h. $m \mid n$ und $m \neq n$
$m\,T\,n \iff$ die Summen aller Primzahlen, die m bzw. n teilen, sind gleich (jeder Primteiler wird nur einfach gezählt)

Aufgabe 2: **Äquivalenzrelationen I** $4+4$ Punkte

Gegeben ist ein Schachbrett dessen Felder wir mit Koordinatenpaaren $(i,j) \in \{1,2,\ldots,8\} \times \{1,2,\ldots,8\}$ beschreiben. (z.B. bezeichnet $(1,1)$ das Feld links unten). Die folgenden Relationen setzen zwei Felder zueinander in Beziehung wenn das zweite vom ersten aus mit einem Turm-, Läufer- oder Springerzug erreichbar ist:

Turm : $(a,b)\;T\;(c,d) \Leftrightarrow (a = c \vee b = d) \wedge |a-c| + |b-d| > 0.$
Springer: $(a,b)\;S\;(c,d) \Leftrightarrow |c-a|\,|d-b| = 2.$
Läufer: $(a,b)\;L\;(c,d) \Leftrightarrow |c-a| = |d-b| \neq 0.$

a) Offensichtlich beschreiben die Relationen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ die Erreichbarkeit in jeweils zwei Zügen. Bestimmen Sie die drei Mengen der von $(1,1)$ mit $T \circ T$, $S \circ S$, und $L \circ L$ erreichbaren Felder.
b) Welche der Verknüpfungen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ und $(L \circ L) \cup L$ sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie positive Antworten durch Beschreibung der Äquivalenzklassen und negative Antworten durch einen konkreten Nachweis, dass eine Eigenschaft verletzt ist.

Aufgabe 3: **Äquivalenzrelationen II** 9 Punkte

Sie $A = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}$ die Menge aller Ergebnisse beim Werfen von einem roten und einem grünen Würfel (rot die erste und grün die zweite Zahl). Über A sind drei Äquivalenzrelationen $\sim, \simeq, \approx$ wie folgt definiert:

a) $(a,b) \sim (c,d) \iff |a-b| = |c-d|$
b) $(a,b) \simeq (c,d) \iff (a+b) \equiv (c+d) \mod 7$
c) $(a,b) \approx (c,d) \iff a \cdot b = c \cdot d$

Bestimmen Sie für diese drei Äquivalenzrelationen jeweils die Anzahl der Äquivalenzklassen sowie ein Repräsentantensystem und geben Sie für jeden Repräsentanten die Größe seiner Äquivalenzklasse an.