Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

2. Übung **Abgabe: 02.11.2012 bis 10:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Quantoren** 10 **Punkte**

Wir betrachten die folgenden Prädikate wahlweise im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:
$P(x, y, z) =$ " $x + y = z$ " und $Q(x, y, z) =$ " $x \cdot y = z$ "
Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen und begründen Sie Ihre Antwort wie im folgenden Beispiel: $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} \quad P(x, y, z)$ ist wahr.
Begründung: Seien $x = a$ und $z = b$ beliebige ganze Zahlen, dann wählen wir $y = b - a \in \mathbb{Z}$ und erhalten mit $P(a, b - a, b)$ wegen $a + (b - a) = b$ eine wahre Aussage. Bei falschen Aussagen muss man begründen, dass deren Negation eine wahre Aussage ist.

Die Aussagen:
a) $\exists z \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad \neg P(x, 2y, z)$
b) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad P(4x, 2y, 2z)$
c) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \forall z \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad Q(x, y, z)$
d) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad P(x, y, z)$
e) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad (x \geq z \vee P(x, y, z))$

Aufgabe 2: **Quantoren** 3 **Punkte**

Die Eigenschaft, dass eine natürliche Zahl p eine Primzahl ist, kann man durch die folgende Formel ausdrücken (als Bereich wird $\mathbb{N}$ vereinbart):

$$(p > 1) \ \wedge \ \forall\, x \quad \forall y \quad (p = x \cdot y \rightarrow x = 1 \vee y = 1)$$

Negieren Sie diese Formel und bringen Sie den inneren Teil durch äquivalente Umformungen in eine möglichst einfache Form. Weisen Sie anhand dieser negierten Formel nach, dass $p = 15$ keine Primzahl ist.

Aufgabe 3: **Beweistechniken** $3 + 3$ **Punkte**

a) Beweisen Sie den folgenden Satz mit Fallunterscheidung bezüglich der Reste beim Teilen durch 3.
Satz: Seien a und b zwei natürliche Zahlen, so dass weder a noch b durch 3 teilbar sind, dann ist die Zahl $c = a + b$ oder die Zahl $d = a - b$ NICHT durch 3 teilbar.

b) Beweisen Sie den folgenden Satz durch Kontraposition!
Satz: Ist (mindestens) eine der ganzen Zahlen a und b NICHT durch 5 teilbar, dann ist auch (mindestens) eine der Zahlen $c = a + 2b$ und $d = a + 3b$ NICHT durch 5 teilbar.