Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

13. Übung Abgabe: 01.02.2013 bis 10:00 Uhr (04.02.2013 bis 10:00 Uhr für die Mittwochs- und Donnerstagstutorien)

Aufgabe 1: **Durchmesser** $2+3$ Punkte

a) Zeigen Sie, dass für jeden nicht zusammenhängenden Graphen G der Durchmesser des Komplementärgraphen $\overline{G}$ höchstens 2 ist.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G, dessen Durchmesser größer als 2 ist, der Durchmesser des Komplementärgraphen $\overline{G}$ höchstens 3 ist.

Aufgabe 2: **Bäume** $3+4$ Punkte

Für einen Baum $T=(V,E)$ betrachten wir die Abstandssumme

$$s(T) := \sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} d_T(u,v) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{u\in V}\sum_{\substack{v\in V\\ v\neq u}} d_T(u,v).$$

a) Welchen minimalen Wert kann diese Summe für Bäume mit n Knoten annehmen und durch welche Bäume wird dieser Extremwert realisiert? Begründen Sie, dass dieser Wert für keinen Baum kleiner werden kann.
b) Welchen maximalen Wert kann diese Summe für Bäume mit n Knoten annehmen und durch welche Bäume wird dieser Extremwert realisiert? Begründen Sie, dass dieser Wert für keinen Baum größer werden kann.
Hinweis: Die Beschreibung des Werts kann zunächst durch eine konkrete Summenformel erfolgen. Mit etwas Mühe sollte man sie auch in $\binom{n+1}{3}$ umformen können. Nutzen Sie dazu die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Aufgabe 3: **BFS und DFS** 4 Punkte

Ein Graph $G(V,E)$ mit $V=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ sei durch die folgende Adjazenzliste gegeben: $a:b,c,f;\ b:a,d,f;\ c:a,f,h;\ d:b,e,f,g,h;\ e:d;\ f:a,b,c,d,h;\ g:d,h;\ h:c,d,f,g;.$
Konstruieren Sie den BFS–Baum und den DFS–Baum von G bei Start in a.

Aufgabe 4: **Breitensuche** $3+2$ Punkte

Es sei $G=(V,E)$ ein beliebiger, zusammenhängender Graph in dem ein beliebiger Knoten r als Wurzel gewählt wurde und sei $T=(V,E')$ ein BFS–Baum von G mit der Wurzel r. Wir suchen allgemeingültige Aussagen über die Durchmesser von G und T:

a) Finden Sie eine möglichst kleine Konstante C_1, so dass $D(T)\leq C_1\cdot D(G)$ immer gilt (Beweis!). Zeigen Sie durch Beispielgraphen mit $D(T)=C_1\cdot D(G)$, dass C_1 kleinstmöglich gewählt wurde.

b) Finden Sie eine möglichst kleine Konstante C_2, so dass $D(G)\leq C_2\cdot D(T)$ immer gilt (Beweis!). Zeigen Sie durch Beispielgraphen mit $D(G)=C_2\cdot D(T)$, dass C_2 kleinstmöglich gewählt wurde.