Mathematik für Informatiker I im WS 2010/11

Klausur – Musterlösung – **23.02.2011**

Name: ....

Matrikelnummer: ....

1	2	3	4	5	Gesamt
/8	/8	/7	/6	/5 + 4	/34 + 4

Dozent: K. Kriegel

Tutor:
☐ Julius Auer ☐ Marcel Jünemann ☐ Jakob Krause
☐ Thore Kübart ☐ Stefan Preyer ☐ alte Zulassung

Ich bin einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit Matrikelnummer auf einer FU-internen Webseite einzusehen ist:

JA ○ NEIN ○

Wichtige Hinweise:

1) Wenn die Lösung einer Aufgabe nicht auf den entsprechenden Zettel bzw. auf die freie Seite daneben passt, bitte einen Hinweis auf das Zusatzblatt geben.

2) Bitte nur mit Kugelschreiber oder Tinte schreiben und keine rote Farbe verwenden.

3) Alle Lösungen sind kurz (stichpunktartig), aber inhaltlich ausreichend zu kommentieren!

4) Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein **einseitig, handschriftlich** gefülltes A4-Blatt mit Fakten und Formeln eigener Wahl.

Aufgabe 1: **Logik** **5 + 3 Punkte**

Die n-stellige Majoritätsfunktion $maj_n : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ nimmt genau dann den Wert 1 an, wenn mindestens $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ der n Eingabebits den Wert 1 haben.

a) Konstruieren Sie für die folgende Boolesche Funktion f die kanonische KNF und die kanonische DNF. Vereinfachen Sie beide so weit wie möglich.

$$f(x, y, z) \;:=\; maj_3(x \oplus y, x \oplus z, y \oplus z)$$

b) Die Operartion $\square$ sei durch $x \square y \;:=\; \neg(maj_2(x, y))$ definiert. Zeigen Sie dass $\{\square\}$ eine vollstädige Signatur ist, wobei Ihre Begründung **nur** die Vollständigkeit der Booleschen Signatur $\{\neg, \vee, \wedge\}$ voraussetzen sollte.

Zur Lösung von Teilaufgabe a) können Sie die folgende Tabelle verwenden:

x	y	z	$x \oplus y$	$x \oplus z$	$y \oplus z$	$maj_3(x \oplus y, x \oplus z, y \oplus z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

1P

kanonische KNF: $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$ 1P

keine Vereinfachung möglich 0,5P

kanonische DNF:

$(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$
$\vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

1P

Vereinfachung: Zusammenfassung von (1) und (3), (2) und (6) sowie (3) und (4)

$\equiv (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y)$ 1,5P b)

x	y	$\neg maj_2(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Zeigen, wie $\{\neg, \wedge, \vee\}$ mit $\square$ simuliert werden kann:

$$\neg x \equiv x \square x$$

$$x \vee y \equiv \neg(x \square y) \equiv \underline{(x \square y) \square (x \square y)}$$

$$x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y) \equiv \ldots$$

nicht notwendig

3 x 1P

Aufgabe 2: **Kombinationen und Äquivalenzrelationen** **2 + 6 Punkte**

Sei $M = \{1, 2, \ldots, 101\}$ und $A = \binom{M}{3}$ die Menge aller 3-Kombinationen von M.
Für jede 3-Kombination $K = \{n_1, n_2, n_3\} \in A$ mit $n_1 < n_2 < n_3$ bezeichnen wir n_1 als $min(K)$, n_2 als $med(K)$ und n_3 als $max(K)$.
Nun betrachten wir die folgenden drei Relationen $\sim, \approx, \simeq$ über A:

$$K_1 \sim K_2 \overset{def}{\iff} med(K_1) = med(K_2)$$

$$K_1 \approx K_2 \overset{def}{\iff} min(K_1) = min(K_2) \ \vee \ med(K_1) = med(K_2)$$

$$K_1 \simeq K_2 \overset{def}{\iff} min(K_1) = min(K_2) \ \wedge \ max(K_1) = max(K_2)$$

a) Welche dieser drei Relationen ist eine Äquivalenzrelation und welche nicht? Positive Antworten müssen nicht begründet werden. Bei negativen Antworten sollte durch ein Beispiel gezeigt werden, welche Eigenschaft verletzt ist.

$\sim$ und $\simeq$ sind Äquivalenzrelation 2 x 0,5

$\approx$ ist keine Äquivalenzrelation, denn 0,5

$\approx$ ist nicht transitiv:

$\{1,2,3\} \approx \{1,5,7\} \wedge \{1,5,7\} \approx \{4,5,6\}$,

aber $\{1,2,3\} \not\approx \{4,5,6\}$ 0,5

b) Tragen Sie in die folgende Tabelle nur die Äquivalenzrelation(en) ein, d.h. eventuell sind nur eine oder zwei Spalten auszufüllen. Für jede Äquivalenzrelation R in der Tabelle sei $\mathcal{K}_0^R$ die Äquivalenzklasse der 3-Kombination $K_0 = \{7, 18, 55\}$ sowie $\mathcal{K}_{gr}^R$ die (oder eine) größte Äquivalenzklasse von R und $\mathcal{K}_{kl}^R$ die (oder eine) kleinste Äquivalenzklasse von R. Bestimmen Sie für jede auszufüllende Spalte die Anzahl der Äquivalenzklassen, die Größen der Äquivalenzklassen $\mathcal{K}_0^R$, $\mathcal{K}_{gr}^R$ und $\mathcal{K}_{kl}^R$, sowie jeweils einen Repräsentanten von $\mathcal{K}_{gr}^R$ und $\mathcal{K}_{kl}^R$.

Die Antworten können als Formel gegeben werden, eine numerische Auswertung und zusätzliche Begründungen sind hier nicht erfoderlich.

Relation R	$\sim$	$\simeq$	
Anzahl der Äquiv.-Klassen	99	$\binom{101}{2} - 100 = \binom{100}{2}$ *	
$\lvert\mathcal{K}_0^R\rvert$	$17 \cdot 83$	47	
$\lvert\mathcal{K}_{gr}^R\rvert$	$50 \cdot 50 = 2500$ *	99	
Repräsentant von $\mathcal{K}_{gr}^R$	$\{50, 51, 52\}$	$\{1, 2, 101\}$	
$\lvert\mathcal{K}_{kl}^R\rvert$	99	1	
Repräsentant von $\mathcal{K}_{kl}^R$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	

je 0,5 P * = nicht notwendige Vereinfachung

Erklärungen / nicht notwendige Zusatzkommentare:

(1) Relation $\sim$: Für eine 3-Kombination $\{n_1, n_2, n_3\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3$ kann man n_1 im Bereich $\{1, \ldots, n_2 - 1\}$ und n_3 im Bereich $\{n_2 + 1, \ldots, 101\}$ beliebig variieren, d.h. die Äquivalenzklasse hat $(n_2 - 1) \cdot (101 - n_2)$ Elemente. Dieser Ausdruck wird maximal, wenn $n_2 - 1 = 101 - n_2$, also für $n_2 = 50$, und minimal, wenn einer der Faktoren 1 ist, also für $n_2 = 2$ oder für $n_2 = 100$

(2) Relation $\simeq$: Für $K = \{n_1, n_2, n_3\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3$ kann man n_2 im Bereich $\{n_1+1, \dots, n_3-1\}$ beliebig variieren, d.h. die Äquivalenzklasse hat $n_3 - n_1 - 1$ Elemente. Dieser Ausdruck wird maximal für $n_3 = 101$ und $n_1 = 1$ und minimal für $n_3 = n_1 + 2$, also z.B. für $n_1 = 1$, $n_3 = 3$ oder $n_1 = 2$, $n_3 = 4$, usw.

Aufgabe 3: **Induktion und Rekursion** $4+3$ **Punkte**

a) Die Zahlenfolge a_n sei durch die Anfangswerte $a_0 = 2$ und $a_1 = 3$ sowie die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ gegeben. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung von a_n.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die ganze Zahl $a_n = 8^n + 17^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist.

a) charakt. Polynom: $x^2 - x - 6 = 0$ (0,5 P)

Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$ (1 P)

allg. Ansatz: $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-2)^n$ (0,5 P)

LGS:

$n=0 \quad (\mathrm{I}) \quad 2 = \alpha + \beta \qquad \cdot 2$

$n=1 \quad (\mathrm{II}) \quad 3 = 3\alpha - 2\beta \qquad +$

$(\mathrm{III}) \quad 7 = 5\alpha \qquad \alpha = \frac{7}{5}$

in $(\mathrm{I}) \qquad \beta = \frac{3}{5}$

(1,5 P)

Lösung: $a_n = \frac{7}{5} \cdot 3^n + \frac{3}{5} \cdot (-2)^n$ (0,5 P)

---

b) IA: $n = 0 \qquad a_0 = 8^0 + 17^1 = 18$ durch 9 teilbar. (1P)

IS: $n \to n+1$

$a_{n+1} = 8^{n+1} + 17^{n+2} = 8 \cdot 8^n + 17 \cdot 17^{n+1}$

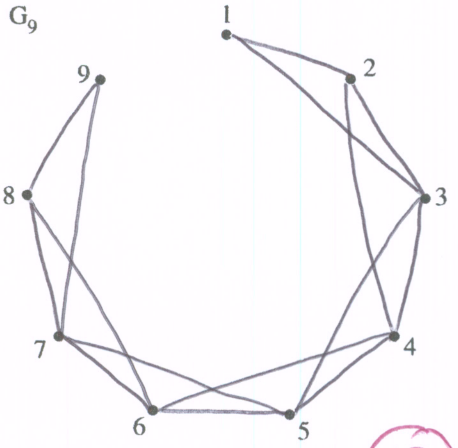
$= 8 \cdot 8^n + \underline{8} \cdot 17^{n+1} + \underline{9} \cdot 17^{n+1}$ (1P)

$= 8 \cdot a_n + 9 \cdot 17^{n+1}$ durch 9 teilbar, weil beide Summanden (erster nach IV) durch 9 teilbar. (1P)

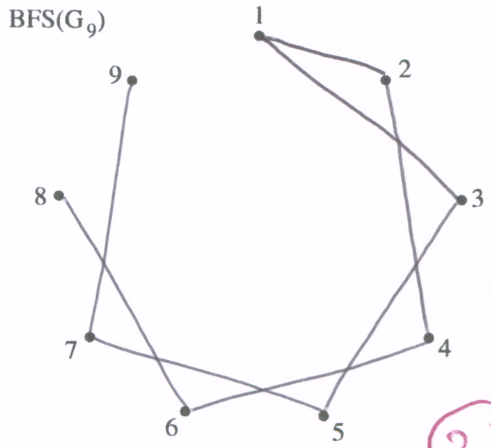
Aufgabe 4: **Graphen** **3 + 3 Punkte**

Der Graph G_n habe die Knotenmenge $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und alle Kanten $\{i, j\}$, mit $1 \leq |i - j| \leq 2$.

a) Zeichnen Sie den Graphen G_9 in das nachfolgende Schema und konstruieren Sie den BFS–Baum von G_9 mit Startknoten 1 und aufsteigend geordneten Adjazenzlisten.



1P



2 P

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von G_n und Durchmesser $D(G_n)$ (jeweils mit kurzen Begründungen)!

$$2|E_n| = \sum_{v \in V_n} \deg v = \underset{\uparrow\atop 1}{2} + \underset{\uparrow\atop 2}{3} + \underbrace{4 + \ldots + 4}_{n-4} + \underset{\uparrow\atop n-1}{3} + \underset{\uparrow\atop n}{2} = 4n-6$$

1P

$$|E_n| = 2n-3$$

$$D(G_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$$ 0,5 P egal welche Variante

Begründung (1) $d_{G_n}(1, n) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ weil jede Kante höchstens Diff. 2

$$\Rightarrow D(G_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$ 0,5 P

(2) Sei $i < j \in V_n$, dann gibt es Weg der Länge $\left\lceil \frac{j-i}{2} \right\rceil$: $i, i+2, i+4, \ldots, j$

$$\left\lceil \frac{j-i}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Rightarrow D(G_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$ 1P

Aufgabe 5: **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten** **2 + 2 + 1 Punkte + 4 Zusatzpunkte**

Die Ausgangssituation für die folgenden Fragen ist immer die gleiche: Eine große Urne ist mit 400 Kugeln gefüllt, nämlich jeweils 100 rote, gelbe, blaue und schwarze Kugeln. Aus der Urne werden Kugeln gezogen und bei jeder Ziehung wird es als gleich wahrscheinlich angesehen, welche der noch in der Urne befindlichen Kugeln gezogen wird. Alle Antworten können in Form von Ausdrücken wie z.B. 2^{100} oder $100^6 \cdot \binom{100}{6}$ gegeben werden. Kurze, stichwortartige Begründungen sind notwendig (z.B. welche Verteilung mit welchem Parameter liegt vor).

a) Aus der großen Urne werden 20 Kugeln gezogen, wobei jede gezogene Kugel gleich wieder in die Urne zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das dabei genau zehnmal eine rote Kugel gezogen wurde und wie groß ist die erwartete Anzahl von roten Kugeln bei diesem Experiment?

b) Drei Spieler ziehen in einer Runde jeweils eine Kugel und legen sie auf den Tisch. Wenn alle drei Kugeln die gleiche Farbe haben ist das Experiment beendet, wenn nicht werden die Kugeln zurückgelegt und sie beginnen eine neue Runde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Experiment in der vierten Runde und was ist die erwartete Rundenanzahl?

c) Aus der großen Urne werden 90 Kugeln gezogen und in eine kleinere Urne gelegt. Wieviele verschiedene Füllungen der kleineren Urne gibt es?

Zusatzfragen:

d) Aus der großen Urne werden 102 Kugeln gezogen und in eine kleinere Urne gelegt. Wieviele verschiedene Füllungen der kleineren Urne gibt es?

e) Aus der großen Urne werden 10 Kugeln gezogen und in eine kleinere Urne gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen am Ende eine schwarze und 9 rote Kugeln in der kleinen Urne?

a) Binomialverteilung mit $p = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$ und $n = 20$ 1P

$Pr(10 \text{ rote Kugeln}) = \binom{20}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{10} = \binom{20}{10} \cdot \frac{3^{10}}{4^{20}}$ 0,5P

X = Anzahl der roten K. bei 20 Z.

$E(X) = n \cdot p = \frac{20}{4} = 5$ 0,5P

b) geometrische Verteilung mit $p = 4 \cdot \frac{100}{400} \cdot \frac{99}{399} \cdot \frac{98}{398}$

4 Farben

$= \frac{99 \cdot 98}{399 \cdot 398}$ 1P

$Pr(4 \text{ Runden}) = (1-p)^3 \cdot p$

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{399 \cdot 398}{99 \cdot 98}$

2 x 0,5P

c) Abzählung durch geordnete Zahlpartitionen mit erlaubten Null-Summanden:

Anzahl $\binom{90+4-1}{4-1} = \binom{93}{3}$ 1P

d) Abzählung wie in c), aber alle Partitionen mit Summanden 102 oder 101 müssen abgezogen werden. Das sind 4 (mit 102) und $12 = 4 \cdot 3$ (mit 101).

Anzahl $\binom{102+4-1}{4-1} - 16 = \binom{105}{3} - 16$ 2P

e) Wir zählen von allen 400^{10} Ziehungen, die "guten":

$$10 \cdot 100 \cdot \underbrace{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 92}_{\text{erste bis 9. Rote}}$$

wann die Schwarze

eine Schwarze

$$Pr(A) = \frac{10 \cdot 100 \cdot 100^9}{400^{10}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{100^9}{399^9}$$ 2P