Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

Musterlösungen zur 8. Übung Klaus Kriegel

Aufgabe 1: **Bijektionen** $2+2+2$ Punkte

Geben Sie konkrete Beschreibungen von bijektiven Funktionen für die folgenden Mengenpaare an:

a) $A = \mathbb{N}$ und $B = \{6, 8, 10, \ldots\}$ die Menge aller geraden Zahlen ≥ 6 (Funktionen f und f^{-1}).

b) $C_k = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ und $D = \{1, 2, \ldots n-1\}$ für ein $n \geq 2$ und ein $1 \leq k \leq n$ (Funktionen f_k und f_k^{-1})

c) $E = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und die Menge F aller injektiven Funktionen φ von $X = \{a, b\}$ nach $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ (Funktionen g und g^{-1}).

Lösungen:

a) $f(n) = 2(n+3)$ und $f^{-1}(m) = \frac{m}{2} - 3$

b) Für $i \in C_k$ wird $f_k(i)$ durch Fallunterscheidung definiert: $f_k(i) = \begin{cases} i & \text{falls } m < k \\ i-1 & \text{sonst} \end{cases}$

Analog wird die Umkehrfunktion für $j \in D$ beschrieben: $f_k^{-1}(j) = \begin{cases} j & \text{falls } j < k \\ j+1 & \text{sonst} \end{cases}$

c) Wir formulieren zuerst die Idee: Welche injektive Funktion $\varphi : \{a, b\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ sollte man dem Paar $(i, j) \in E = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zuordnen?
Naheliegend sollte $\varphi(a) = i$ und $\varphi(b)$ das j-te Element aus $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ sein und dazu kann man die Funktion f_i^{-1} aus Teil b) nutzen.
Somit definieren wir $g((i, j)) = \varphi$ mit $\varphi(a) = i$ und $\varphi(b) = f_i^{-1}(j)$. Umgekehrt ordnet g^{-1} jeder injektiven Funktion $\varphi : \{a, b\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ das Paar $(i, j) \in E$ mit $i = \varphi(a)$ und $j = f_{\varphi(a)}(\varphi(b))$ zu, d.h.

$$g^{-1}(\varphi) = \big(\varphi(a), f_{\varphi(a)}(\varphi(b))\big) .$$

Aufgabe 2: **Doppeltes Abzählen** 2+1+2+1 Punkte

Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $q(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n und $t(n)$ die Anzahl der Faktoren in der Primzahlzerlegung von n (für $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ist $q(12) = 2$ und $t(12) = 3$). Wir setzen $q(1) = t(1) = 0$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie $\sum_{n=1}^{40} q(n)$ mit doppelter Abzählung bestimmt werden kann.
Modifizieren Sie diesen Ansatz zur Bestimmung der folgenden Summen:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{30} q(3n) \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{30} q(12n) \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{30} t(n)$$

Lösung: Als Vorbetrachtung modifizieren wir noch einmal den Ansatz aus der Vorlesung zur Bestimmung der Summe $\sum_{n=1}^{30} p(n)$: Man betrachtet als Inzidenzstruktur

die Teilbarkeitsrealtion zwischen den Primzahlen ≤ 30 (nennen wir diese Menge A) auf der einen und den Zahlen aus $B = \{1, 2, \ldots, 30\}$ auf der anderen Seite. Da eine Primzahl $q \in A$ genau $\left\lfloor \frac{30}{q} \right\rfloor$ Zahlen aus B teilt, ergibt sich beim doppelten Abzählen die folgende Formel:

$$\sum_{q \in A} \left\lfloor \frac{30}{q} \right\rfloor = \sum_{n \in B} p(n) = \sum_{n=1}^{30} p(n)$$

Die linke Seite kann durch Einsetzen aller Primzahlen aus A ausgewertet werden:

$$\left\lfloor \tfrac{30}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{17} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{19} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{23} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{29} \right\rfloor$$

$$= 15 + 10 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 43$$

a) Wenn wir $\sum_{n=1}^{30} p(3n)$ bestimmen wollen, müssen wir an Stelle von B die Menge $B' = \{3, 6, 9, \ldots, 90\}$ setzen. Dabei ändert sich auf der Seite von A, dass nun $q = 3$ alle Zahlen aus B' teilt, für alle anderen Primzahlen $p \neq 3$ gilt $p \mid n \iff p \mid 3n$, d.h. man muss in der Summe aus der Vorbetrachtung nur den zweiten Summanden $\left\lfloor \frac{30}{3} \right\rfloor$ durch 30 ersetzen und erhält somit

$$\sum_{n=1}^{30} p(3n) = 43 + (30 - 10) = 63$$

b) Dieser Fall ist analog zu a) mit dem einzigen Unterschied, dass nun 2 und 3 alle Zahlen aus $B'' = \{12, 24, \ldots, 360\}$ teilen und folglich ist

$$\sum_{n=1}^{30} p(12n) = 43 + (30 - 15) + (30 - 10) = 78$$

c) Zur Berechnung von $\sum_{n=1}^{30} t(n)$ müsste man die Inzidenz zwischen einer Primzahl $q \in A$ und einer Zahl $n \in B$ mehrfach zählen, wenn q mehrfach als Primfaktor in der Primzahlzerlegung von n auftritt. Da sich dass mit dem Prinzip des doppelten Abzählens nicht unmittelbar ausdrücken lässt, verwenden wir einen einfachen Trick: Wir ergänzen A durch alle Primzahlpotenzen ≤ 30. Dadurch wird z.B. der Wert $t(24) = 4$ (Primzahlzerlegung $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$) durch die Inzidenzen mit $2, 3, 4$ und 8 gezählt. Zu den Summanden von den Primzahlen aus der Vorbetrachtung kommen also noch die Summanden von den Primzahlpotenzen und folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{30} t(n) &= 43 + \left\lfloor \tfrac{30}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{30}{27} \right\rfloor \\ &= 43 + 7 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 59 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **Binomialkoeffizienten** $1 + 2 + 2$ Punkte

Eine fundamentale Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ist die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$.

a) Beweisen Sie diese Identität an Hand der geschlossenen Formel!

b) Führen Sie einen kombinatorischen Beweis dieser Identität durch Konstruktion einer Bijektion (zwischen welchen Mengen?).

c) Beweisen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-2}{n-k-2}$ für beliebige $n \geq 3$ und $1 \leq k \leq n-2$ gilt.

Lösung von 3.b: Sei M eine n-Menge und $\binom{M}{k}$ die Menge aller k-Kombinationen von M. Dann ist $\binom{n}{k} = \left|\binom{M}{k}\right|$. Um die Identität zu beweisen, reicht es eine bijektive Abbildung $f : \binom{M}{k} \longrightarrow \binom{M}{n-k}$ zu konstruieren. Das ist sehr einfach:
$f(K) := M \setminus K$ beschreibt die Abbildung und da man die inverse Abbildung in gleicher Weise definieren kann, ist f bijektiv.

Aufgabe 4: **Partitionen** $3 + 2$ Punkte

a) Geben Sie eine kombinatorische Begründung dafür, dass für alle $n \geq 2$ die Gleichung $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ gilt.

Lösung: Wir betrachten eine n-Menge M und fixieren ein Element $a \in M$. Jede 2-Partition von M hat die Form $\{A, B\}$ wobei B o.B.d.A. der Block der Partition sein soll, der a nicht enthält. Dann muss B eine nichtleere Teilmenge von $M \setminus \{a\}$ sein. Wählt man umgekehrt eine beliebige nichtleere Teilmenge B aus $M \setminus \{a\}$ aus, so ergibt sich daraus automatisch die 2-Partition $\{M \setminus B, B\}$ von M. Folglich ist die Anzahl der 2-Partition von M gleich der Anzahl der nichtleeren Teilmengen von $M \setminus \{a\}$ und diese ist gleich $|\mathcal{P}(M \setminus \{a\})| - 1 = 2^{n-1} - 1$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl (die Zahl, keine Formel) der geordneten Partitionen der Zahl $n = 100$ in 8 Summanden $a_i \geq 12$.

Lösung: Man kann eine Bijektion zwischen der Menge der Zahlpartitionen aus der Aufgabenstellung und der geordneten Partitionen der Zahl $n = 12 = 100 - 8 \cdot 11$ in in 8 Summanden $b_i \geq 1$ bilden, indem man von jedem Summanden a_i aus der ersten Partition 11 subtrahiert. Die zweite Partitionsmenge hat bekanntlich die Größe $\binom{12-1}{8-1} = \binom{11}{7} = \binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$.