Musterloesung: Uebung 7

Sebastian Scherer

January 27, 2013

Aufgabe 1

Zunaechst mal eine vereinfachende Schreibweise. Fuer die von einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ erzeugten Additionsabbildung schreiben wir m_+, fuer die entsprechende Multiplikationsabbildung $m.$. Zu zeigen ist $k.(m_+(n)) = (k.(m))_+(k.(n))$, $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$. Es duerfen nur die Abbildungseigenschaften der in der Vorlesung rekursiv definierten Addition und Multipliation und das Assoziativgesetz der Addition benutzt werden. Die Idee ist, vollstaendige Induktion ueber n zu nutzen, wobei man die Parameter k und m beliebig aber fest waehlt. Seien dazu also $k, m \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig, und sei $n = 0$ fuer den Induktionsanfang. Dann ist

$$k.(m_+(0)) = k.(m) = (k.(m))_+(0) = (k.(m))_+(k.(0)) \tag{1}$$

aufgrund der Eigenschaften

$$l_+(0) = l \ \forall l \in \mathbb{N} \qquad\qquad p.(0) = 0 \ \forall p \in \mathbb{N} \tag{2}$$

die Teil der Definition von Addition bzw. Multiplikation sind. Fuer den Induktionsschritt gehen halten wir wieder beliebige $m, k \in \mathbb{N}$ fest und gehen davon aus, dass die Aussage fuer n bereits gilt. Wir werden zeigen dass sie dann auch fuer die Zahlen k, m und den Nachfolger $S(n)$ von n gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
k.[m_+(S(n))] &= k.[S(m_+(n))] && (3)\\
&= [k.(m_+(n))]_+(k) && (4)\\
&= [k.(m)_+(k.(n))]_+(k) && (5)\\
&= k.(m)_+[(k.(n))_+(k)] && (6)\\
&= k.(m)_+[k.(S(n))]. && (7)
\end{aligned}$$

Dabei wurde im ersten bzw. zweiten Schritt die rekursive Definition der Addition bzw. Multiplikatioen benutzt. Von Gleichung (4) zu (5) kommt man, indem man die Induktionsvoraussetzung auf den ersten Teil anwendet. In den naechsten beiden Schritten benutzt man erst das Assoziativgesetz mit den Termen $k.(m)$, $k.(n)$ und k und dann wieder die rekursive Definition der Multiplikation. Insgesamt hat man also

$$k.(m_+(S(n))) = k.[S(m_+(n))] = k.(m)_+(k.(S(n))), \tag{8}$$

was die gewuenschte Gleichung ist.

Aufgabe 2

a) Zu zeigen:$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $6|a_n := 2n^3 + 3n^2 + n$
Der Indukionsanfang fuer $n = 1$ ist einfach: Es ist

$$a_1 = 2 + 3 + 1 = 6,$$

was offensichtlich durch 6 teilbar ist.
Induktionsschritt: Es gelte die gewuenschte Aussage fuer n. Wir zeigen, dass sie dann auch fuer $n + 1$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) \\ &= 2(n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1) + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 4 + n \\ &= a_n + 6n^2 + 12n + 6 \\ &= a_n + 6(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $6|a_n$ gilt, ist der Ausdruck in der letzten Zeile als Summe zweier durch 6 teilbaren Zahlen ebenfalls durch 6 teilbar. Damit gilt also auch $6|a_{n+1}$, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen.

b) Zu zeigen: $\forall n \geq 1$ gilt $\sum_{i+1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Induktionsanfang: Fuer $n = 1$ ist

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6},$$

was die Behauptung fuer den Fall $n = 1$ zeigt.
Indutionsschritt: Es gelte die Behauptung fuer n. Wir zeigen dass sie dann fuer $n+1$ gilt. Es ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2,$$

was nach Induktionsvoraussetzung als

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

geschrieben werden kann. Das soll gleich dem Ausdruck

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

sein. Da beide Ausdruecke den Term $\frac{n+1}{6}$ enthalten, sind die Ausdruecke genau dann gleich wenn sie denselben Restfaktor haben, wenn also

$$n(2n+1) + 6(n+1) = (n+2)(2n+3)$$

erfuellt ist. Das bestaetigt man aber schnell durch einfaches Ausmultiplizieren. Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen und die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 3

Um die Inklusions-Exklusionsformel anzuwenden (fuer $n = 4$) bilden wir zunaechst die 4 Mengen $A_i, i = 1 \dots 4$ der defekten Geraete und ueberlegen uns wie wir die Maechtigkeit der gesuchten Menge als Schnitt bzw. Vereinigung dieser Mengen darstellen koennen. Dazu setzen wir fuer $i = 1, \dots, 4$

$$A_i := \{\text{Geraete mit Fehlertyp } i\}$$

Aus den Angaben in der Aufgabe und diser Definition folgen direkt

$$|A_1| = 600, \qquad |A_2| = 150, \qquad |A_3| = 650, \qquad |A_4| = 450,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_3 \cap A_4| = 120, \qquad |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_3| = 230, \qquad |A_1 \cap A_4| = 240, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$

und letztendlich

$$| \cup_{i=1}^4 A_i| = 1200.$$

Wir sind an der Menge

$$D = \{\text{Geraete, die gleichzeitig genau 3 unterschiedliche Fehlertypen haben}\}$$

interessiert. Wir koennen D als disjunkte Vereinigung der 3er-Schnitte schreiben, also

$$D = \cup_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3},$$

so dass sich fuer die Maechtigkeit

$$|D| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

ergibt.Aus den Maechtigkeiten der 2er- Schnitte (und der Tatsache, dass die 3er-Schnitte Untermengen der passenden 2er-Schnitte sind) folgt jedoch, dass der einzige 3er-Schnitt der nichtleer ist, der Schnitt $A_1 \cap A_3 \cap A_4$ ist, so dass also

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = |D|$$

gilt. Die Rechte Seite dieser Gleichung ist durch die Inklusions-Exklusionsregel bestimmt. Wenn man diese nun nach der Summe der 3er-Schnitte umstellt und die entsprechenden Maechtigkeiten der Mengen einsetzt ergibt sich also insgesamt

$$\begin{aligned} |D| &= |\cup_{i=1}^4 A_i| - \sum_{i=1}^{4} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 1200 - (600 + 150 + 650 + 450) + 120 + 120 + 230 + 240 + 0 = 60 \end{aligned}$$

Also haben genau 60 Geraete genau 3 verschiedene Fehler.

Aufgabe 4

a) Eine durch $j := i - 4$, $i = j + 4$ gegebene Indexverschiebung bzw. Umbenennung in der zweiten Summe liefert

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+4)}{2} + \sum_{i=4}^{n+4} \frac{i(i-4)}{2} - \sum_{i=0}^{n} i^2 + 3i \\ =\ & \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+4)}{2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{(j+4)j}{2} - \sum_{i=0}^{n} i^2 + 3i \\ =\ & \sum_{i=0}^{n} i(i+4) - \sum_{i=0}^{n} (i^2 + 3i) \\ =\ & \sum_{i=0}^{n} (i^2 + 4i) - \sum_{i=0}^{n} (i^2 + 3i) \\ =\ & \sum_{i=0}^{n} (i^2 - i^2 + 4i - 3i) \\ =\ & \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

b) Es ist wegen $2(2+i) = 4i+2$ und der Umformungsregel fuer Konstanten innerhalb eines Produktes

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{i=1}^{2n} 2i}{(\prod_{i=1}^{n} i)(\prod_{i=0}^{n-1}(4i+2))} &= \frac{2^{2n}(\prod_{i=1}^{2n} i)}{(\prod_{i=1}^{n} i)2^n(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1))} \\ &= \frac{2^{n}(\prod_{i=1}^{2n} i)}{(\prod_{i=1}^{n} i)(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1))}\end{aligned}$$

Jetzt teilt man das Produt im Zaehler auf in Faktoren mit geradem und ungeradem Index, so dass man

$$\frac{2^n(\prod_{i=1}^{n} 2i)(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1))}{(\prod_{i=1}^{n} i)(\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1))} = \frac{2^n(\prod_{i=1}^{n} 2i)}{(\prod_{i=1}^{n} i)}$$

erhaelt. Ein weiteres Anwenden der Umformungsregel fuer Konstanten in einem Produkt liefert letztendlich

$$\frac{2^n(\prod_{i=1}^{n} 2i)}{(\prod_{i=1}^{n} i)} = \frac{2^{2n}(\prod_{i=1}^{n} i)}{(\prod_{i=1}^{n} i)} = 2^{2n}.$$