Mathematik für Informatiker I **WS 12/13**

Musterlösung zur 4. Übung Musterlösung Titus Laska

Aufgabe 1: **Vollständigkeit von Signaturen** 8 Punkte

Welche der folgenden vier Signaturen sind vollständig und welche nicht. Begründen Sie positive Antworten durch Zurückführung auf die Boolesche Basis $\{\neg, \wedge, \vee\}$ und negative Antworten durch Argumente, dass eine bestimmte Funktion nicht darstellbar ist.

$$\Sigma_1 = \{0, \rightarrow\} \qquad \Sigma_2 = \{\wedge, \vee, \oplus\} \qquad \Sigma_3 = \{1, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \qquad \Sigma_4 = \{1, \vee, \oplus\}$$

Lösung:

- Die Signatur $\Sigma_1 = \{0, \rightarrow\}$ ist vollständig.

  Wir zeigen dazu, dass alle Funktionen der Booelschen Signatur realisiert werden können. Die Negation kann wie folgt dargestellt werden: $\neg x \equiv x \rightarrow 0$

  Wegen $x \rightarrow y \equiv \ negx \vee y$ kann man jetzt auch die Disjunktion realisieren:

  $x \vee y \equiv \neg x \rightarrow y \equiv (x \rightarrow 0) \rightarrow y$

  Letztlich kann die Konjunktion über die deMorgansche Regel aus Negation und Disjunktion zusammengesetzt werden.

- Die Signatur $\Sigma_2 = \{\wedge, \vee, \oplus\}$ ist nicht vollständig.

  Begründung: Die konstante Boolesche Einsfunktion ist nicht darstellbar. Belegt man nämlich in einer beliebigen Formel t über Σ_2 alle Variablen mit 0, dann muss auch t den Wert 0 annehmen.

- Die Signatur $\Sigma_3 = \{1, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ist nicht vollständig.

  Begründung: Die konstante Boolesche Nullfunktion ist nicht darstellbar. Belegt man nämlich in einer beliebigen Formel t über Σ_3 alle Variablen mit 1, so folgt wegen

  $$\begin{aligned} 1 \wedge 1 &\equiv 1 \\ 1 \rightarrow 1 &\equiv 1 \\ 1 \leftrightarrow 1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

  stets $t \equiv 1$.

- Die Signatur $\Sigma_4 = \{1, \vee, \oplus\}$ ist vollständig.

  Zurückführung auf Boolesche Basis: Zu finden sind Darstellungen für $\wedge$ und $\neg$:

  $$\begin{aligned} \neg x &\equiv 1 \oplus x \\ x \wedge y &\equiv \neg(\neg x \vee \neg y) \equiv 1 \oplus ((1 \oplus x) \vee (1 \oplus y)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **Partitionen** 3+2 Punkte

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ eine Partition der Menge A und $\mathcal{A}_i = \{A_{i,j} \,|\, j \in J_i\}$ eine Partition der Menge A_i für jedes $i \in I$.

a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ auch eine Partition der Menge A ist. Das ist nicht schwer - der anspruchvollste Teil der Aufgabe besteht darin, alles auf die Definitionen zurück zu führen und sich zu überlegen, welche Punkte denn eigentlich zu beweisen sind. Wenn Sie sich darüber nicht klar sind, lösen Sie zuerst Teil b.

b) Sei $A = \{1, 2, \ldots, 14\}$ und $\mathcal{A}$ die Partition von A bezüglich der Reste beim Teilen durch 3 (beschreiben Sie selbst I und die Mengen A_i). Im zweiten Schritt beschreibt $\mathcal{A}_i$ jeweils die Partition von A_i in gerade und ungerade Zahlen. Auch hier sind geeignete Indexmengen J_i zu finden. Bestimmen Sie jetzt die Partition $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

Lösung:
a) Wir erinnern uns an die Definition einer Partition: Eine Partition einer Menge A ist eine Zerlegung von A in Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, sodass gilt:

- Die A_i sind nichtleer, d.h. $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$
- Die A_i sind paarweise disjunkt, d.h. $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ für alle $i_1, i_2 \in I$ mit $i_1 \neq i_2$
- Die Vereinigung der A_i ergibt A, d.h. $\cup_{i\in I} A_i = A$.

Unter der Voraussetzung, dass diese Eigenschaften jeweils für $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}\}$ und $\mathcal{A}_i = \{A_{i,j} \mid j \in J_i\}$ gegeben sind, ist also zu zeigen, dass auch $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ diese Eigenschaften hat. Wir bemerken dazu, dass $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\{A_{i,j} \mid j \in J_i\} = \{A_{i,j} \mid i \in I \text{ und } j \in J_i\}$ gilt.

- Alle $A_{i,j}$ sind nichtleer, da für jedes $i \in I$ $\mathcal{A}_i$ eine Partition von A_i ist (und $A_i \neq \emptyset$, da $\mathcal{A}$ Partition ist).
- Zu zeigen ist $A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \emptyset$ falls $i_1 \neq i_2$ oder (!) $j_1 \neq j_2$.

  Fall 1: $i_1 \neq i_2$. Dann gilt $A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \emptyset$, da $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ ($\mathcal{A}$ ist Partition) und $A_{i_1,j_1} \subseteq A_{i_1}$, $A_{i_1,j_1} \subseteq A_{i_1}$.

  Fall 2: $i_1 = i_2 =: i$. dann gilt auf jeden Fall $j_1 \neq j_2$. Die Eigenschaft $A_{i,j_1} \cap A_{i,j_2} = \emptyset$ folgt direkt daraus, dass $\mathcal{A}_i$ Partition ist.
- Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_i$ Partitionen sind, gilt natürlich

$$\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} A_{i.j} = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{i\in I} A_i = A$$

  .

Damit ist $\mathcal{S}$ eine Partition von A.

b) Wir geben die Mengen $A_{i,j}$ an, die zu der Partition $\mathcal{S}$ gehören. Bezeichne dazu A_i die Teilmenge von A, deren Divisionsrest modulo 3 gleich i ist, $i = 0, 1, 2$. Sei ferner für festes i immer $A_{i,j}$ für $j = 0$ die Teilmenge der geraden und für $j = 1$ die Teilmenge der ungeraden Zahlen in A_i.

$$A_0 = \{3, 6, 9, 12\}, A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\}, A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= \{6, 12\}, \quad A_{0,1} = \{3, 9\} \\ A_{1,0} &= \{4, 10\}, \quad A_{1,1} = \{1, 7, 13\} \\ A_{2,0} &= \{2, 8, 14\}, \quad A_{2,1} = \{5, 11\} \end{aligned}$$

Damit ist die Partition $\mathcal{S} = \cup_{i\in I}\{A_{i,j} \mid j \in J_i\} = \{A_{i,j} \mid i \in I \text{ und } j \in J_i\}$ vollständig bestimmt.

Aufgabe 3: **Mengenfamilien** 8 Punkte

Sei $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ die Menge aller Primzahlen und für jedes $p \in P$ die Menge $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch } p \text{ teilbar}\}$ gegeben.
Sei $\mathbb{N}^+$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null und für jedes $i \in \mathbb{N}^+$ die Menge $B_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 100 \leq n^i \leq 10000\}$ gegeben.
Bestimmen Sie die folgenden Vereinigungen und Durchschnitte und begründen Sie Ihre Lösung:

a) $\bigcap_{p \in P} A_p$ *b)* $\bigcup_{p \in P} A_p$ *c)* $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$ *d)* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$

Lösung:

- $\bigcap\limits_{p \in P} A_p = \{0\}$.

  Begründung:

  - Die 0 ist durch jede natürliche Zahl teilbar
  - Wenn $n \geq 1$ ist, wähle eine Primzahl $p \in P$ mit $p > n$. Dann gilt $n \notin A_p$ und also $n \notin \cap_{p \in P} A_p$.

- $\bigcup\limits_{p \in P} A_p = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

  Begründung:

  - $0 \in A_2$ (zum Beispiel)
  - Die 1 ist durch keine Primzahl teilbar
  - Wenn $n > 1$ ist, wähle einen Primfaktor p von n (Primfaktorzerlegung!). Dann gilt $n \in A_p$ und also $n \notin \cup_{p \in P} A_p$.

- $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^+} B_i = \emptyset$

  Begründung: Es gilt zum Beispiel $B_{14} = \emptyset$, da $2^{14} = 16384 > 10000$ ist.

- $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^+} B_i = \{2, 3, \ldots, 10000\}$

  Begründung:

  - Für $n \leq 1$ ist $n^i < 100$ für alle $i \in \mathbb{N}^+$
  - $B_1 = \{100, 101, \ldots, 10000\}$
  - $B_2 = \{10, \ldots, 100\}$
  - Anstatt so weiter zu rechen (auch möglich!) gehen wir wiefolgt vor:

    Sei $2 \leq n \leq 100$. Finde i mit $n \in B_i$. Es ist $100 \leq n^i \Leftrightarrow \log_n 100 \leq i \log_n n \leq i$. Setze also $i := \lceil \log_n 100 \rceil$. Dann gilt $n^i \geq 100$ und $n^{i-1} < 100$. Damit und nach Wahl von n folgt $100 < n^i \leq 10000 \Rightarrow n \in B_i$