

Musterloesung: Uebung 3

Sebastian Scherer

December 10, 2012

Aufgabe 1

Die gegebene Funktion ist durch

$$f((b_1, b_2, b_3)) = 1 \equiv b_1 \leq b_2 \leq b_3 \quad (1)$$

definiert. Um die DNF anzugeben muessen wir einfach die Formel aus dem Skript benutzen. Dazu muessen wir das Urbild $f^{-1}(1)$ bestimmen und fuer jedes Tupel in diesem Urbild den entsprechenden Minterm bilden. Wenn wir alle Terme gebildet haben koennen wir uns ueberlegen welche wir vereinfachen um die kanonische DNF zu verkuerzen. Die Funktionswerte und Minterme sehen dann so aus:

b_1	b_2	b_3	$f(b)$	Minterm
0	0	0	1	$\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$
0	0	1	1	$\neg x \wedge \neg y \wedge z$
0	1	0	0	
1	0	0	0	
0	1	1	1	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$

Bevor wir d_f hinschreiben, koennen wir noch vereinfachen. Die Tupel $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$ z.B. unterscheiden sich nur in der b_3 Koordinate. Das bedeutet dass wir, anstatt beide Minterme hinzuschreiben, wir bei beiden Mintermen das z "fallen" lassen koennen und nur *einmal* den zusammengefassten Term $\neg x \wedge \neg y$, der dem gekuerzten Tupel $(0, 0, \cdot)$ entspricht, hinschreiben. Nach dem gleichen Prinzip werden die Minterme der Tupel $(0, 1, 1)$ und $(1, 1, 1)$ zu dem Term $y \wedge z$ zusammengefasst, so dass insgesamt gilt:

$$d_f = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) = \neg x \wedge \neg y \vee y \wedge z \quad (2)$$

Aufgabe 2

Die Funktionen sind durch

$$f(x, y, z, u) = 1 \Leftrightarrow 4 \mid Z(x, y, z, u) \quad (3)$$

$$g(x, y, z, u) = 1 \Leftrightarrow Z(x, y, z, u) \leq 5 \quad (4)$$

$$h(x, y, z, u) = 1 \Leftrightarrow (Z(x, y, z, u) \bmod 8) \neq 3 \quad (5)$$

gegeben, wobei

$$Z(a_3, a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=0}^3 a_i \cdot 2^i. \quad (6)$$

Um nach der Definition aus dem Skript die KNF zu bauen, müssen wir also fuer jede Funktion die Urbilder $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$ und $h^{-1}(0)$ bestimmen und die entsprechenden Maxterme bilden. Bei der Bildung der Maxterme muss man allerdings aufpassen, da sie nicht wie bei der DNF gebildet werden, sondern jede Koordinate erst noch "verneint" wird. In einer Tabelle sieht das dann so aus:

$Z(x, y, z, u)$	x	y	z	u	f	g	h	Maxterm g	Maxterm h
0	0	0	0	0	1	1	1		
1	0	0	0	1	0	1	1		
2	0	0	1	0	0	1	1		
3	0	0	1	1	0	1	0		$x \vee y \vee \neg z \vee \neg u$
4	0	1	0	0	1	1	1		
5	0	1	0	1	0	1	1		
6	0	1	1	0	0	0	1	$x \vee \neg y \vee \neg z \vee u$	
7	0	1	1	1	0	0	1	$x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg u$	
8	1	0	0	0	1	0	1	$\neg x \vee y \vee z \vee u$	
9	1	0	0	1	0	0	1	$\neg x \vee y \vee z \vee \neg u$	
10	1	0	1	0	0	0	1	$\neg x \vee y \vee \neg z \vee u$	
11	1	0	1	1	0	0	0	$\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg u$	$\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg u$
12	1	1	0	0	1	0	1	$\neg x \vee \neg y \vee z \vee u$	
13	1	1	0	1	0	0	1	$\neg x \vee \neg y \vee z \vee \neg u$	
14	1	1	1	0	0	0	1	$\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee u$	
15	1	1	1	1	0	0	1	$\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee \neg u$	

Durch scharfes Hinsehen erkennt man, dass die Funktion f genau dann den Wert 0 an, wenn mindestens eine der zwei Eingabebits z oder u gleich Eins sind. Also kann man fuer die logische Formel, die f entspricht, auch schreiben

$$k_f = \neg z \wedge \neg u \quad (7)$$

Damit kann man an dieser Stelle sogar das Bilden der Maxterme umgehen, weshalb die Spalte der Maxterme von g in der Tabelle ausgelassen wurde. Als naechstes bilden wir die KNF der Funktion h . Hier erkennen wir, dass die beiden Tupel, die $h^{-1}(0)$ bilden, sich bis auf die x -Koordinate gleichen. Aehnlich wie bei der Bildung der DNF in Aufgabe 1 bedeutet das, dass wir die Maxterme $x \vee y \vee \neg z \vee \neg u$ und $\neg x \vee y \vee \neg z \vee \neg u$ zu $y \vee \neg z \vee \neg u$, was dem gekuerzten Tupel $(\cdot, 0, 1, 1)$ entspricht, zusammenfassen koennen. Also ist

$$k_h = y \vee \neg z \vee \neg u \quad (8)$$

Fuer die Funktion g muss man am meisten tun. Da hier $g^{-1}(0)$ aus vielen Tupeln besteht, kann man hier auf viele verschiedene Weisen zusammenfassen. Wenn man es geschickt macht, kann man nicht nur jeweils 2 Tupel zusammenfassen, sondern sogar 4 oder 8. Dazu muss man mit den gekuerzten Tupeln genauso verfahren wie mit den urspruenglichen, d.h. Tupel, die sich bis auf eine Koordinate gleichen, zusammenfassen und diese eine Koordinate streichen. Damit kann man auf folgendes Vereinfachungsschema kommen:

$$\begin{array}{rcl}
 (0, 1, 1, 0) & \searrow & \\
 (0, 1, 1, 1) & \rightarrow & (0, 1, 1, \cdot) \searrow \\
 (1, 1, 1, 0) & \searrow & (\cdot, 1, 1, \cdot) \Rightarrow \neg y \vee \neg z \\
 (1, 1, 1, 1) & \rightarrow & (1, 1, 1, \cdot) \nearrow \\
 (1, 0, 0, 0) & \searrow & \\
 (1, 0, 0, 1) & \rightarrow & (1, 0, 0, \cdot) \searrow \\
 (1, 0, 1, 0) & \searrow & (1, 0, \cdot, \cdot) \Rightarrow \neg x \vee y \\
 (1, 0, 1, 1) & \rightarrow & (1, 0, 1, \cdot) \nearrow \\
 (1, 1, 0, 0) & \searrow & \\
 (1, 1, 0, 1) & \rightarrow & (1, 1, 0, \cdot) \Rightarrow \neg x \vee \neg y \vee z
 \end{array}$$

Damit vereinfacht sich die KNF von g zu

$$k_g = (\neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \quad (9)$$

Aufgabe 3

Fuer diese Aufgabe ist es wichtig zu wissen, wie die Ordnungsrelation auf dem Tupelraum \mathbb{B}^n und der Monotoniebegriff fuer boolsche Funktionen genau definiert sind. Das steht beides auf dem Uebungsblatt.

a) Die Funktionen sind durch

$$f((b_1, b_2, \dots, b_n)) = 1 \Leftrightarrow b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \quad (10)$$

$$g((b_1, b_2, \dots, b_n)) = 1 \Leftrightarrow \text{Mindestens 3 Eingabebits sind Einsen} \quad (11)$$

$$h((b_1, b_2, \dots, b_n)) = 1 \Leftrightarrow \text{Gerade Anzahl von Einsen} \quad (12)$$

gegeben.

Die Funktion f ist nicht monoton. Ein moegliches Gegenbeispiel gegen die Monotonie ist z.B. das Tupelpaar $b = (0, 0, 0)$ und $c = (1, 0, 0)$, wobei $n = 3$. Da $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ erfuellt ist, gilt einerseits $f(b) = 1$, andererseits aber wegen $c_1 > c_2$ gleichzeitig $f(c) = 0$. Damit ist bei $b \leq c$ aber $f(b) > f(c)$, und damit kann f nicht monoton sein.

Die Funktion g ist fuer alle $n \in \mathbb{R}$ monoton. Fuer $n \leq 2$ ergibt sich aus der Definition von g dass man die konstante Nullfunktion erhaelt, welche monoton ist. Fuer allgemeine $n \geq 3$ kann man sich folgendes ueberlegen: Sei $b, c \in \mathbb{B}^n$, mit $b \leq c$. Falls b weniger als drei Einsen enthaelt, so ist $g(b) = 0$, und es ist egal welchen Wert $g(c)$ annimmt. Hat b drei oder mehr Einsen (also $g(b) = 1$), so hat c aufgrund der Definition der Relation $b \leq c$ mindestens genau so viele Einsen, naemlich da, wo b Einsen hat (und vielleicht noch an anderen Stellen). Damit hat also c ebenfalls mindestens drei Einsen und es ist $g(c) = 1 = g(b)$, und damit insbesondere $g(b) \leq g(c)$. Also ist g monoton.

Die Funktion h ist nicht monoton. Gegenbeispiel: $b = (0, 0, 1, 1)$, $c = (0, 1, 1, 1)$. Damit ist $b \leq c$ erfuellt, aber es ist $h(b) = 1$ und $h(c) = 0$, also $f(b) > f(c)$ obwohl ja $b \leq c$ gilt, was ein Widerspruch zur Monotonie waere.

- b) Man soll zeigen dass jede durch die Signatur $\Sigma = \{0, 1, \wedge, \vee\}$ erzeugte logische Formel einer monotonen boolschen Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ entspricht. Dazu zeigen wir zuerst, dass alle durch Σ erzeugten Formeln der Laenge 0 (also die Formeln 1, 0, x_i , $i = 1, 2, \dots, n$) diese Eigenschaft haben. Dann zeigen wir im Induktionsschritt, dass Verknuepfungen von Formeln mit dieser Eigenschaft wiederum diese Eigenschaft haben. Also:

Induktionsanfang: Die konstanten logischen Formeln 0 und 1 erzeugen die konstanten Funktionen $f_0 \equiv 0$ bzw. $f_1 \equiv 1$. Da konstante Funktionen trivialerweise monoton sind, haben die Formeln 1 und 0 also die gewuenschte Eigenschaft. Die Formel x_i erzeugt die boolsche Funktion $f_{x_i}((b_1, b_2, \dots, b_n)) = b_i$, da ja nur der Wahrheitswert der Variable x_i von Belang fuer den Wert der Funktion sein soll. Ist nun $b \leq c$ fuer beliebige $b, c \in \mathbb{B}^n$, dann ist insbesondere $b_i \leq c_i$. Das ist in diesem Fall aber schon genau die gewuenschte Ungleichung $f_{x_i}(b) = b_i \leq c_i = f_{x_i}(c)$ nach Definition von f_{x_i} . Also ist auch f_{x_i} monoton.

Induktionsschritt: Seien nun s und t zwei beliebige boolsche Formeln die die gewuenschte Eigenschaft bereits haben. Wir zeigen nun mittels Fallunterscheidung dass dann auch die Formeln $s \vee t$ und $s \wedge t$ monotone Funktionen erzeugen. Seien also $b, c \in \mathbb{B}^n$, $b \leq c$, beliebig aber fest. Nach Voraussetzung koennen wir davon ausgehen, dass die von s und t erzeugten Funktionen f_s bzw. f_t monoton sind.

$f_s(b)$	$f_s(c)$	$f_t(b)$	$f_t(c)$	$f_{s \wedge t}(b)$	$f_{s \wedge t}(c)$	$f_{s \vee t}(b)$	$f_{s \vee t}(c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Da aus $b \leq c$ daher stets $f_{s,t}(b) \leq f_{s,t}(c)$ folgt, ergeben sich aus der Annahme $b \leq c$ die in den ersten vier Spalten angezeigten Wertekombinationen fuer die Groessen $f_t(b)$, $f_t(c)$, $f_s(b)$ und $f_s(c)$. Es gilt dann in jedem Fall die entsprechenden Werte fuer die Funktionen $f_{s \wedge t}$ und $f_{s \vee t}$ abzuleiten und zu ueberpruefen, ob in jedem Fall die Ungleichungen $f_{s \wedge t}(b) \leq f_{s \wedge t}(c)$ und $f_{s \vee t}(b) \leq f_{s \vee t}(c)$ wahr sind. Mithilfe der Beziehungen

$$f_{s \vee t}(a) = 1 \Leftrightarrow f_s(a) = 1 \vee f_t(a) = 1 \quad (13)$$

$$f_{s \wedge t}(a) = 1 \Leftrightarrow f_s(a) = 1 \wedge f_t(a) = 1 \quad (14)$$

lassen sich die Werte der letzten vier Spalten herleiten. Man sieht, dass in jedem Fall $f_{s \wedge t}(b) \leq f_{s \wedge t}(c)$ und $f_{s \vee t}(b) \leq f_{s \vee t}(c)$ wahr sind, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen. Damit ist die Behauptung gezeigt.