

Aufgabe 1: Bedingte Wahrscheinlichkeit 2 + 1 + 2 Punkte

a) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 40 unter den sechs gezogenen Zahlen beim Spiel 6 aus 49 ist (die Zusatzzahl spielt hier keine Rolle), unter der Voraussetzung, dass genau 4 der gezogenen Zahlen ≤ 20 sind?

Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs gezogenen Zahlen beim Spiel 6 aus 49 genau zwei ≥ 40 sind, unter der Voraussetzung, dass genau eine der gezogenen Zahlen ≤ 20 ist?

Lösung: Sei A das Ereignis, dass genau 4 der gezogenen Zahlen ≤ 20 sind und B das Ereignis, dass die Zahl 40 gezogen wird. Das Ereignis A tritt also dann ein, wenn 4 Zahlen aus den ersten 20 und zwei Zahlen aus den restlichen 29 gezogen wurden. Somit ergibt sich:

$$\Pr(A) = \frac{\binom{20}{4}\binom{29}{2}}{\binom{49}{6}}, \quad \Pr(A \cap B) = \frac{\binom{20}{4}\binom{28}{1}}{\binom{49}{6}} \quad \text{und} \quad \Pr([B|A]) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\binom{28}{1}}{\binom{29}{2}} = \frac{2}{29}$$

Sei C das Ereignis, dass genau eine der gezogenen Zahlen ≤ 20 ist und D das Ereignis, dass genau zwei Zahlen ≥ 40 sind.

$$\Pr(C) = \frac{\binom{20}{1}\binom{29}{5}}{\binom{49}{6}}, \quad \Pr(C \cap D) = \frac{\binom{20}{1}\binom{9}{2}\binom{20}{3}}{\binom{49}{6}} \quad \text{und} \quad \Pr([D|C]) = \frac{\binom{9}{2}\binom{20}{3}}{\binom{29}{5}}$$

b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von zwei Würfeln gleich 8 ist, unter der Voraussetzung, dass keiner der Würfel eine 1 zeigt?

Lösung: Sei A das Ereignis, dass die Summe gleich 8 ist und B das Ereignis, dass kein Würfel eine 1 zeigt. Offensichtlich setzt sich A aus den elementaren Ereignissen $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ zusammen und Ereignis B aus den 25 geordneten Paaren ohne einen 1. Also ist $A \cap B = A$. Daraus folgt

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) = \frac{5}{36} \quad \Pr(B) = \frac{25}{36} \quad \text{und} \quad \Pr([A|B]) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

c) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass bei 8 Münzwürfen genau viermal Kopf fällt, unter der Voraussetzung, dass bei den ersten 4 Würfeln genau zweimal Kopf gefallen ist? Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass bei 8 Münzwürfen genau viermal Kopf fällt, unter der Voraussetzung, dass bei den ersten 4 Würfeln genau dreimal Kopf gefallen ist?

Lösung: Wir nennen hier nur die Ergebnisse, die Begründungen sollte jeder selbst finden. Im ersten Fall ergibt sich eine bedingte Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{\binom{4}{2} \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{2} \frac{1}{2^4}}{\binom{4}{2} \frac{1}{2^4}} = \binom{4}{2} \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8} \quad \text{und im zweiten Fall} \quad \frac{\binom{4}{3} \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{1} \frac{1}{2^4}}{\binom{4}{3} \frac{1}{2^4}} = \binom{4}{1} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2:**Unabhängigkeit**

3 + 1 + 2 Punkte

a) Zeigen Sie, dass aus der Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A und B auch die Unabhängigkeit der Komplementärereignisse folgt.

Lösung: Wir beweisen zuerst den Hilfssatz, dass aus der Unabhängigkeit von Ereignissen A und B die Unabhängigkeit von A und \bar{B} folgt:

$$\begin{aligned} \Pr(A \cap \bar{B}) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) && \text{weil } A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \text{ disj. Vereinigung} \\ &= \Pr(A) - \Pr(A)\Pr(B) && \text{weil } A \text{ und } B \text{ unabhängig} \\ &= \Pr(A)(1 - \Pr(B)) && \text{Ausklammern} \\ &= \Pr(A)\Pr(\bar{B}) && \text{Komplementärereignis} \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen und die Behauptung folgt durch die zweifache Anwendung des Hilfssatzes.

b) Ist es möglich, dass zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, B nicht unabhängig von einem Ereignis C , aber C wieder unabhängig von A ist?

Lösung: Ein typischer Fall dafür entsteht, wenn man für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit jeweils positiver Wahrscheinlichkeit $B = C$ setzt. Z.B. kann man für den Wahrscheinlichkeitsraum des Würfels $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = C = \{1, 4\}$ wählen. Ein weiteres Beispiel, in dem aber B und C verschieden sind, wäre $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ und $C = \{1, 5\}$.

c) Beweisen Sie das Folgende: Ist (Ω, \Pr) ein Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Ereignispaare A, B unabhängig sind, dann gibt es genau ein $a \in \Omega$ mit $\Pr(a) = 1$.

Lösung: Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass es kein $a \in \Omega$ mit $\Pr(a) = 1$ gibt. Wegen $\Pr(\Omega) = 1$ muss es dann aber ein $a \in \Omega$ mit $0 < \Pr(a) < 1$ geben. Dann sind die Ereignisse $A = \{a\}$ und $B = \bar{A}$ nicht unabhängig, denn $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$ aber $\Pr(A)\Pr(B) = \Pr(A)(1 - \Pr(A)) > 0$.

Aufgabe 3:**Erwartungswerte I**

4 Punkte

Sei (a, b) ein zufälliges Ergebnis beim zweifachen Würfeln. Bestimmen Sie die Erwartungswerte der folgenden zwei Zufallsvariablen:

a) $X(a, b) = a^2 + b^2$ b) $Y(a, b) = ab$.

Ergebnisse (ohne Lösungsweg): $E(X) = \frac{91}{3}$ und $E(Y) = \frac{49}{4} = 3,5^2$.

Aufgabe 4:**Erwartungswerte II**

6 Punkte

Bei einer Klausur besteht eine Aufgabe aus 7 Fragen, die entweder mit ja oder mit nein zu beantworten sind. Für jede richtige Antwort erhält man 2 Punkte, für jede falsche 3 Minuspunkte. Man kann Fragen auch unbeantwortet lassen (0 Punkte). Zur Auswertung wird die Punktschme S bestimmt. Ist S positiv, so wird die Gesamtaufgabe mit S Punkten bewertet, sonst mit 0 Punkten.

Bei Fragen, deren Beantwortung man nicht kennt, hat man die Wahl zwischen Strategie 1, die Frage unbeantwortet zu lassen, und Strategie 2, eine Antwort zu raten.

Bestimmen Sie für die folgenden 3 Studenten den Erwartungswert für die Punktzahl bei der Strategie 2 (Rate-Strategie) und vergleichen Sie diese mit der Strategie 1. Entwerfen Sie jeweils einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Zufallsvariablen zur Beschreibung der erreichten Punktzahl.

Alice kann die Fragen 1 bis 5 sicher beantworten und ist bei den Fragen 6 und 7 völlig ratlos.

Bob hat nicht gelernt und ist bei allen Fragen völlig ratlos.

Carola kann die Fragen 1 und 2 sicher beantworten und ist bei den Fragen 3 bis 7 völlig ratlos.

Lösung: Wir bezeichnen mit X, Y und Z die Zufallsvariablen für die Ergebnisse von Alice, Bob und Carola, wenn sie alle Antworten auf die (jeweils für sie) offenen Fragen raten. Wir beobachten, dass die drei Variablen für alle Ereignisse, bei denen insgesamt weniger als 5 Fragen richtig beantwortet werden, den Wert 0 annehmen (schon bei 4 richtigen Antworten wäre die Punktsomme negativ). Es reicht also aus, für die drei Kandidaten jeweils die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass sie genau 5, 6 oder 7 richtige Antworten haben. Für insgesamt 5 richtige Antworten muss Alice 0 von 2 Antworten richtig raten, Bob 5 von 7 und Carola 3 von 5, analog für 6 und 7. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus Binomialverteilungen. Die Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, Wahrscheinlichkeiten für 4 oder weniger richtige Antworten interessieren an dieser Stelle nicht und werden nur durch ein * symbolisiert.

$k =$ Anzahl der richtigen Antw.	Ergebnis bei k richtigen Antw.	$\Pr([X = k])$	$\Pr([Y = k])$	$\Pr([Z = k])$
≤ 4	0	*	*	*
5	4	$\binom{2}{0} \frac{1}{2^2}$	$\binom{7}{5} \cdot \frac{1}{2^7}$	$\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2^5}$
6	9	$\binom{2}{1} \frac{1}{2^2}$	$\binom{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7}$	$\binom{5}{4} \cdot \frac{1}{2^5}$
7	14	$\binom{2}{2} \frac{1}{2^2}$	$\binom{7}{7} \cdot \frac{1}{2^7}$	$\binom{5}{5} \cdot \frac{1}{2^5}$

Daraus ergibt sich:

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{2}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 14 = \frac{36}{4} = 9$$

$$E(Y) = \frac{21}{128} \cdot 4 + \frac{7}{128} \cdot 9 + \frac{1}{128} \cdot 14 = \frac{161}{128} \approx 1.26$$

$$E(Z) = \frac{10}{32} \cdot 4 + \frac{5}{32} \cdot 9 + \frac{1}{32} \cdot 14 = \frac{99}{32} \approx 3.1$$

Das Raten lohnt sich also für Alice und Carola nicht, denn sie haben ohne Raten 10 bzw. 4 Punkte sicher. Dagegen lohnt sich das Raten für den ahnungslosen Bob.