9. Übung | **Mathematik für Informatiker III** | **WS 11/12**

Klaus Kriegel | **Abgabe: 11.01.2012, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Eigenwerte** (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der Eigenräume zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Kontrollergebnis: Ein Eigenwert ist 0.

Aufgabe 2: **Hauptachsentransformation** (8 Punkte)

Bestimmen Sie eine orthonormale Diagonalbasis zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 4/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kontrollergebnis: Das charakteristische Polynom hat ganzzahlige Koeffizienten und beginnt mit $-\lambda^3 + 4\lambda^2 \ldots\ldots$

Aufgabe 3: **Zusammenfassung** ($4+4$ Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit der Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ bezüglich der Standardbasen. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

A:	$rg(A) = n$	**B:**	$rg(A) = m$
C:	$n = m$ und 0 ist kein Eigenwert von f	**D:**	$Ker(f) = \{\vec{0}\}$
E:	$\exists B \in M(n \times m, \mathbb{R}) \quad det(BA) \neq 0$	**F:**	$rg(A) = max(n, m)$
G:	$\exists B \in M(n \times m, \mathbb{R}) \quad AB = E_m$	**H:**	f ist surjektiv
I:	f ist injektiv	**J:**	f ist bijektiv
K:	$dim(Im(f)) \geq m$	**L:**	$n = m$

a) Gruppieren Sie die Aussagen **A** bis **L** in (maximale) Klassen von paarweise äquivalenten Aussagen.

So könnte Ihre Lösung für eine fiktive Aussagenmenge **R** bis **Z** aussehen:

$\mathcal{K}_1 = \{\mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{\mathbf{S}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{X}\}, \quad \mathcal{K}_3 = \{\mathbf{Y}\}.$
Ob es in unserem Fall $2, 3, 4$, oder mehr Klassen gibt, ist Teil der Aufgabenstellung.

b) Geben Sie kurze Begründungen für die Äquivalenz der Aussagen im der Klasse der Aussage **I**.