8. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 04.01.2012, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Entwicklungsformel** (5 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ die lineare Hülle der Vektormenge $\{(-1,2,-2,0),(1,0,1,1)\}$. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = (-1,0,-1,1)$ in eine Summe $\vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in U^\perp$.

Kontrollergebnis: Der zweite Vektor der Orthonormalbasis von U hat die Form

$$\vec{u_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Aufgabe 2: **Orthogonalprojektion** (6 Punkte)

Der Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$ werde durch die Vektoren $\vec{v_1} = (-3,4,0)$ und $\vec{v_2} = (-4,2,1)$ aufgespannt. Berechnen Sie die Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, welche die Orthogonalprojektion P_U als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ beschreibt. (Hinweis: Etwas Bruchrechnung ist leider notwendig, auch die $\sqrt{5}$ spielt eine wichtige Rolle. Am Ende sind alle Koeffizienten von A Brüche mit der 125 im Nenner.)

Aufgabe 3: **Isometrien** (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $<\ ,\ >$ und $dim(V) \geq 2$ sowie $\vec{z} \in V$ ein fest gewählter Vektor mit $||\vec{z}|| = 1$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$f(\vec{v}) := \vec{v} - 2 < \vec{z}, \vec{v} > \vec{z} \qquad \forall \vec{v} \in V$$

eine orthogonale Abbildung (Isometrie) ist.
Hinweis: Um es anhand der Definition zu beweisen, muss man $< \vec{u}, \vec{v} > = < f(\vec{u}), f(\vec{v}) >$ nachrechnen. Eine stichpunktartige Begründung der einzelnen Schritte mit den Eigenschaften des Skalarprodukts ist hier besonders wichtig! Es gibt aber auch einen Beweis (fast) ohne Rechnungen. Man finde eine Othonormalbasis von V, so dass die Bilder der Basisvektoren (auf offensichtliche Art) wieder eine Orthonormalbasis bilden.

Aufgabe 4: **orthogonale Matrizen** (5 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat einen Sack voller Zahlen mitgebracht. Kann er für die Symbole a bis i bzw. p bis u solche reellen Zahlen finden, dass die Matrizen A und B zu orthogonalen Matrizen werden? Wenn es geht, dann berechnen Sie geeignete Werte, sonst geben Sie eine Begründung, warum es keine Lösung gibt!

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & a & 2/3 & 2/3 \\ b & c & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{8}/3 & d & e & f \\ g & 1 & h & i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & p \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & q \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & s \\ 1/2 & t & u & -1/2 \end{pmatrix}.$$