6. Übung | **Mathematik für Informatiker III** | **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 07.12.2009, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Quotientenraum** $(2+3+2$ Punkte$)$

Wir betrachten den Unterraum $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = x_4 - x_2 = x_1 + x_4 \}$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^4$, den Quotientenraum $W = V/U$ und die vier Nebenklassen $\vec{w_i} = \vec{e_i} + U \in W$ (der Basisvektoren $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_4}$).

a) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\vec{v} = (2, 4, 3, 2)$ in der Nebenklasse w_1 liegt.

b) Wählen Sie aus dem Erzeugendensystem $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}, \vec{w_4},\}$ eine Basis von V/U aus (Begründung!!).

c) Untersuchen Sie, ob die Gleichung $\vec{w_1} + \vec{w_4} = \vec{w_2} + \vec{w_3}$ gilt.

Aufgabe 2: **Inverse Matrix** $(3+3$ Punkte$)$

Bestimmen Sie die inverse Matrix von $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit der Methode der parallelen Zeilenumformungen! Untersuchen Sie für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Matrix B_a invertierbar ist und bestimmen Sie bei positiver Antwort die inverse Matrix B_a^{-1} wieder mit der Methode der parallelen Zeilenumformungen!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: **Determinanten** $(6$ Punkte$)$

Für die folgenden Matrizen $A_n = (a_{i\,j})$, $B_n = (b_{i\,j})$, $C_n = (c_{i\,j}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sollen die Determinaten bestimmt werden:

$$a_{i\,j} = \begin{cases} 3 & \text{falls } j = 1 \\ j - i & \text{falls } j > i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad b_{i\,j} = \begin{cases} \frac{i}{j+1} & \text{falls } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad c_{i\,j} = i + j$$

Hinweis: Beachten Sie die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Parameter n.

Aufgabe 4: **Cramersche Regel** $(3$ Punkte$)$

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden LGS mit der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \end{array}$$