5. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 30.11.2011, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Lineare Gleichungssysteme I** (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden LGS mit dem in der Vorlesung besprochenen Gaußschen Verfahren.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & = & -1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & - & 9x_5 & = & -13 \end{array}$$

Kontrollergebnis: Das System hat Lösungen und der Rang ist 4.

Aufgabe 2: **Lineare Gleichungssysteme II** $(2 + 3 + 2$ Punkte)

a) Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $\vec{b}, \vec{c} \in K^n$ beliebige Vektoren. Zeigen Sie, dass wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung hat, auch $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eine Lösung haben muss.

b) Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ und $\vec{0} \neq \vec{b} \in K^n$, so dass $\text{Lös}(A \,|\, \vec{b}\,) \cap \text{Lös}(B \,|\, \vec{b}\,) \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $rg(A - B) < n$ gilt.

c) Sei $A \in M(6 \times 8, K)$ und sei $\dim\,(\text{Lös}\,(A \,|\, \vec{0}\,)) = 2$. Zeigen Sie, dass dann das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in K^6$ eine Lösung hat.

Aufgabe 3: **Modellierung mit LGS** $(4 + 2$ Punkte)

Von einer natürlichen Zahl n sei über die Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ das Folgende bekannt:

1. Es treten nur die Primfaktoren $2, 3$ und 5 auf und $\sum_{i=1}^{k} p_i = 58$.
2. In der Primzahlzerlegung der Zahl $m = 81n$ tritt der Faktor 2 genau so oft auf, wie der Faktor 3.
3. Die Faktoren 2 und 3 treten zusammen doppelt so oft auf wie der Faktor 5.

a) Bestimmen Sie alle Zahlen n mit den gennanten Eigenschaften **und verwenden Sie ein lineares Gleichungsystem zur Lösung des Problems**.

b) Streichen Sie die letzte Bedingung und berechnen Sie wieder alle n, die (1) und (2) erfüllen und darüber hinaus auch durch 10 000 teilbar sind.