| 4. Übung | Mathematik für Informatiker III | WS 11/12 |
|---|---|---|

Klaus Kriegel **Abgabe: 23.11.2011, 12:00 Uhr**

**Aufgabe 1:** **Kern und Bild** (5 Punkte)

Die lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ ist wie folgt durch die Bilder der Basisvektoren von $\mathbb{R}^4$ gegeben.Bestimmen Sie Kern und Bild von $f$ durch Konstruktion entsprechender Basen und kommentieren Sie den Lösungsweg.

$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{e_4}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:** **Rang von Abbildungen** ($2+2+3+3$ Punkte)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum sowie $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V)$ zwei beliebige Endomorphismen und $fg$ die Komposition von $g$ und $f$. Zeigen Sie anhand der Definitionen und der Sätze aus der Vorlesung die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Im}(fg) \subseteq \mathrm{Im} f$ und $\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}(fg)$.

b) $\mathrm{rg}(fg) \leq \min(\, \mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\,)$

c) $\dim(\mathrm{Ker}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) \geq \dim(\mathrm{Ker}(fg))$

Ansatz: Erweitere eine Basis $B_1$ von $\mathrm{Ker}\, g$ zu einer Basis $B_2$ von $\mathrm{Ker}(fg)$ zu einer Basis $B_3$ von $V$ und begründe, dass die Vektoren $\{\, g(\vec{v}) \mid \vec{v} \in B_2 \setminus B_1\}$ linear unabhängig sind. Wie kann man daraus die Aussage ableiten?

d) $\mathrm{rg}(fg) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n$

Hinweis: Das kann (und darf) man aus den bisherigen Punkten ableiten, auch wenn diese nicht vollständig bewiesen wurden.

**Aufgabe 3:** **Matrizen** (5 Punkte)

Bestimmen Sie Basen für die Kerne und Bilder der vier linearen Abbildungen, die durch die folgenden Matrizen repäsentiert sind und begründen Sie die Lösungen. Bei Verwendung der Dimensionsformel für lineare Abbildungen geht es fast ohne Rechnungen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$