3. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 15.11.2011, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Basis** (6 Punkte)

Bei dieser Übung geht es um den Umgang mit den Definitionen von Erzeugendensystem und linearer Unabhängigkeit. Deshalb sollen die Lösungen mit den Mitteln erfolgen, die in den Vorlesungen der zweiten und dritten Vorlesungswoche besprochen wurden. Lösungen mit Techniken wie Dreiecksentwicklung vom Matrizen oder Determinanten werden (an dieser Stelle) nicht anerkannt.
Welche der folgenden zwei Vektormengen sind Basen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2: **kleine Beweise** (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch Anwendung von Definitionen und geeigneten Sätzen aus der Vorlesung (Skript):

- Ist V ein k-dimensionaler Vektorraum, $M, N \subseteq V$ zwei jeweils linear unabhängige Teilmengen mit $|M| = m$, $|N| = n$ und $k < m + n$, dann gibt es einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in V, so dass $\vec{v} \in \mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(N)$.
- Sind U und W zwei Unterräume eines Vektorraums V, so dass $U \cap W$ die Dimension 0 hat, dann gilt für zwei beliebige Nicht-Nullvektoren $\vec{u} \in U$ und $\vec{w} \in W$, dass $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3: **Lineare Abbildungen** (3 + 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, mit den folgenden Eigenschaften:

$$f(1,1,1) = (1,1,-2),\ f(1,0,2) = (-1,0,3),\ f(0,2,2) = (0,2,2).$$

a) Bestimmen Sie die Bilder der Basisvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ unter f.

b) Berechnen Sie Basen des Kerns und des Bildes von f.

Aufgabe 4: **Lineare Abbildungen** (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Zahlen über dem Körper $\mathbb{Q}$ und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f(1) = 3 + 2\sqrt{3}$ und $f(\sqrt{3}) = -2 - 2\sqrt{3}$. Finden Sie ein $r \in V$, so dass $f(r) = 2r$ gilt.
Hinweis: Ein solches r muss es nicht notwendigerweise geben, aber im konkreten Fall kann man es schon in $\mathrm{Lin}(\{1, \sqrt{3}\})$ finden.