2. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 08.11.2011, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Unterräume** (6 Punkte)

Sie V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von V einen Unterraum bilden:

$$\begin{array}{ll} a) & U_1 = \{ f \in V \mid f(-1) - f(1) = 0 \} \\ b) & U_2 = \{ f \in V \mid f(-1) \cdot f(1) = 0 \} \\ c) & U_3 = \{ f \in V \mid (f(-1))^2 - (f(1))^2 = 0 \} \\ d) & U_4 = \{ f \in V \mid (f(-1))^2 + (f(1))^2 = 0 \} \end{array}$$

Positive Antworten müssen bewiesen, negative Antworten durch passende Gegenbeispiele belegt werden!

Aufgabe 2: **Lineare Unabhängigkeit I** (4 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antworten nur anhand der Definition, verwenden Sie hier insbesondere **keine** Dimensionsargumente!

a) $M_1 = \{ (2, -2, 3), (1, -1, 2) \}$

b) $M_2 = \{ (1, 1, -1), (3, -1, 0), (-1, 3, -2), (0, -2, 3) \}$

c) $M_3 = \{ (2, 1, -1), (2, -1, 0), (6, 0, -2) \}$

Aufgabe 3: **Lineare Unabhängigkeit II** (4 Punkte)

Seien P_1, P_2, P_3, P_4 vier Punkte auf einer Ebene E im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ die zugehörigen Ortsvektoren. Zeigen Sie, dass dann die drei Vektoren $\vec{w_1} = \vec{v_1} - \vec{v_4}$, $\vec{w_2} = \vec{v_2} - \vec{v_4}$ und $\vec{w_3} = \vec{v_3} - \vec{v_4}$ linear abhängig sind.
Beweisen bedeutet, die Definitionen wie z.B. die Punktrichtungsgleichung einer Ebene zu verwenden. Anschauliche oder rein verbale Erklärungen sind nicht gefragt!

Aufgabe 4: **Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$** (4 + 3 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}$ der rellen Zahlen über dem Körper $\mathbb{Q}$ und die Vektormenge $M = \{2, \sqrt{2}, \sqrt{8}\}$.

a) Welche Vektoren $\vec{r_i}$ liegen in $\mathrm{Lin}(M)$ und welche nicht? Begründen Sie die Antworten!

$$\vec{r_1} = \sqrt{32}, \qquad \vec{r_2} = \sqrt{2}(3 - \sqrt{8}), \qquad \vec{r_3} = \sqrt{5}(10 - \sqrt{80})$$

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{2, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Für jede natürliche Zahl n, die nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, gilt $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.