14. Übung **Mathematik für Informatiker III** **WS 11/12**

Klaus Kriegel **Abgabe: 15.02.2010, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Diskrete Zufallsvariable** (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten den durch zwei unabhängige und gleichverteilte Würfel erzeugten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Pr), d.h. jedes $(a,b) \in \Omega = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Wir definieren die Zufallsvariablen X, Y, Z wie folgt:
$X(a,b) \;=\; 6a+b$
$Y(a,b) \;=\; a \cdot b$
$Z(a,b) \;=\; 6 \cdot max(a,b) + min(a,b)$
Beschreiben Sie die diskreten Verteilungsfunktionen Pr_X, Pr_Y und Pr_Z der drei Variablen und bestimmen Sie die Erwartungswerte $E(X),\ E(Y),\ E(Z)$

Aufgabe 2: **Erwartungswerte** (3 + 4 Punkte)

Sei n eine gerade Zahl und Ω_n der diskrete Wahrscheinlichkeitsraum für n Münzwürfe (fair mit $p = \frac{1}{2}$). Wir betrachten die Zufallsvariablen K_n und Z_n, welche die Anzahl der Kopf- und Zahlergebnissen bei n Münzwürfen zählen und definieren $X_n = |K_n - Z_n|$ als absolute Differenz aus Kopf- Und Zahlergebnissen.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E(X_6)$, $E(X_8)$ und $E(X_{10})$ (gekürzte Brüche, keine Formeln).

b) Anspruchsvolle Zusatzaufgabe: Beweisen Sie, dass für gerade n die folgende Rekursion gilt:

$$E(X_{n+2}) = E(X_n) + \binom{n}{n/2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Aufgabe 3: **Stetige Zufallsvariable** (2+2+2 Punkte)

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ die (volle) Kugel mit Radius 1, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und q ein zufälliger Punkt aus K (bezüglich Gleichverteilung). Es sei $X : K \longrightarrow \mathbb{R}$ die Zufallsvariable, die den Abstand von q zum Kugelrand beschreibt.
a) Bestimmen Sie die Verteilung F_X und die Dichtefunktion f_X von X.
Hinweis: Das Volumen ist einer Kugel mit Radius r ist $\frac{4\pi r^3}{3}$; als Probe kann man prüfen, ob das Integral über f_X gleich 1 ist.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
c) Es sei K_q die größte Kugel mit Mittelpunkt q, die (noch) vollständig in K liegt. Wir definieren eine Zufallsvariable Y durch $Y(q) = Vol(K_q)$. In welcher Beziehung steht Y zu X? Bestimmen Sie $E(Y)$.