

Aufgabe 1:**Hamming-Räume**

(7 Punkte)

Bei der Beantwortung der folgenden Fragen kommt es nicht nur auf die richtige Anzahl, sondern auch auf die richtige Begründung an.

- Wie viele Elemente hat ein m -dimensionaler Unterraum eines Hamming-Raums $H(n, p)$ ($m, n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl)?
- Wie viele Vektoren aus $H(4, 3)$ sind linear unabhängig zum Vektor $(2, 1, 0, 1)$?
- Seien \vec{v} und \vec{w} zwei linear unabhängige Vektoren aus $H(3, 5)$. Wie viele Vektoren $\vec{u} \in H(3, 3)$ gibt es, die zusammen mit \vec{v} und \vec{w} eine Basis von $H(3, 5)$ bilden?
- Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ über dem Körper $GF(7)$, wobei A eine 4×6 -Matrix vom Rang 4 ist. Kann man daraus genau folgern, ob und wieviele Lösungen das Gleichungssystem hat und wenn ja, wie viele sind es dann?

Aufgabe 2:**Lineare Codes**

(2 Punkte)

Sie $C \subseteq H(5, 5)$ ein linearer Code, zu dem u.a. die folgenden Codewörter gehören:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Finden Sie ein Codeword \vec{c}_4 mit $d(\vec{c}_3, \vec{c}_4) = 3$.

Aufgabe 3:**Generatormatrix**

(5 + 4 Punkte)

- Die linearen Codes $C_1 \subseteq H(6, 2)$ und $C_2 \subseteq H(5, 5)$ sind durch die folgenden Generatormatrizen G_1 und G_2 gegeben. Finden Sie zwei Generatormatrizen in Standardform für die gleichen Codes. Vergessen Sie nicht, Ihre Lösung kurz zu begründen.

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man muss mit elementaren **Spaltenumformungen** zu einer Einheitsmatrix in den oberen drei Zeilen kommen.

- Konstruieren Sie jeweils eine Prüfmatrix zu C_1 und C_2 und bestimmen Sie die Minimalabstände der Codes anhand dieser Prüfmatrizen.