

Aufgabe 1: Euklidischer Algorithmus (4 Punkte)

a) Stellen Sie die 1 als Linearkombination aus 79 und 21 mit ganzzahligen Koeffizienten dar.

b) Bestimmen Sie im Körper $GF(101)$ das inverse Element zur 24.

Aufgabe 2: endliche Körper I (4 Punkte)

Lösen Sie die folgende lineare Gleichung im Körper $GF(89)$:

$$20 \cdot x + 78 = 6$$

Aufgabe 3: endliche Körper II (3+6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Determinanten der nachfolgenden Matrix A über den Körpern $GF(3)$, $GF(5)$ und $GF(7)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Für welche der drei Körper ist A invertierbar? Bestimmen Sie die inverse Matrix (Matrizen) dort wo es möglich ist und verwenden Sie dazu die Komplementärmatrix.

Hinweis: Die Regel von Sarrus ist auch für endliche Körper anwendbar. Solange man nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen ausführt, kann die Gesamtrechnung im Bereich der ganzen Zahlen erfolgen und erst zum Schluss wird der Rest gebildet.

Aufgabe 4: endliche Körper III (5 Punkte)

Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $GF(5)$:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array}$$