1. Übung | **Mathematik für Informatiker III** | **WS 11/12**

Klaus Kriegel | **Abgabe: 02.11.2011, 10:00 Uhr**

Achtung: Die Aufgaben 1 bis 3 auf diesem Blatt werden gleich im Tutorium besprochen und sind deshalb nicht zur Abgabe vorgesehen.

Aufgabe 1: **Äquivalenzrelationen** (0 Punkte)

Was ist eine Äquivalenzrelation und was ist eine Äquivalenzklasse?
Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Relationen Äquivalenzrelationen über dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind und beschreiben Sie jeweils ein Repräsentantensystem der Relationen.

a) $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \exists\, s \in \mathbb{R} \quad \vec{v} - \vec{w} = s \cdot (0,1,1)$

b) $\vec{v} \approx \vec{w} \iff \exists\, s \in \mathbb{R} \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \quad \vec{v} - \vec{w} = s \cdot (0,1,1) + t \cdot (0,0,1)$

Aufgabe 2: **Elementargeometrie** (0 Punkte)

Beschreiben Sie die Gerade g im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(1,0,-1)$ und $(3,-1,0)$ in parametrisierter Form mit einer Punktrichtungsgleichung. Finden Sie eine äquivalente Umformung dieser Gleichung, so dass die Menge der Punkte auf g als Lösungsmenge eines linearen Gleichungsystems beschrieben wird, d.h. gesucht ist eine Beschreibung der folgenden Form:

$$(a,b,c) \in g \quad \iff \quad (a,b,c) \text{ ist Lösung des linearen Gleichungsystems (?)}$$

Aufgabe 3: **Gruppen** (0 Punkte)

Zeigen Sie durch Anwendung der Gruppenaxiome (und der Fakten aus der zweiten Vorlesung), dass in einer Gruppe $(G,*)$ für beliebige $a,b \in G$ das Folgende gilt:
$\overline{(a*b)} \;=\; \overline{b} * \overline{a}$.

Aufgabe 4: **Elementargeometrie** (3 Punkte)

Beschreiben Sie die Ebene E im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(1,1,-1)$, $(2,3,4)$ und $(1,0,1)$ in parametrisierter Form mit einer Punktrichtungsgleichung. Finden Sie eine äquivalente Umformung dieser Gleichung, so dass die Menge der Punkte auf E als Lösungsmenge eines linearen Gleichungsystems beschrieben wird.
Hinweise: Die Gleichungen entstehen durch Reduktion der Parameter. Ein Gleichungssystem kann auch aus einer einzigen Gleichung bestehen.

Aufgabe 5: **Körper** (3 Punkte)

Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper mit $+$-neutralem Element 0 und $\cdot$-neutralem Element 1 und $+$-inversen Elementen $-a$ für alle $a \in K$. Zeigen Sie durch Anwendung der Gruppen- und Körperaxiome (und der Fakten aus der zweiten Vorlesung), dass für ein beliebiges $a \in K$ das Folgende gilt: $(-1)\cdot(-a) = a$.

Aufgabe 6: **Äquivalenzrelationen** (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden zwei Relationen über dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und untersuchen Sie, welche Äquivalenzrelationen sind und welche nicht (Begründungen nicht vergessen!).

a) $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \exists\, s \in \mathbb{R} \quad s \neq 0 \ \wedge \quad \vec{v} + s \cdot \vec{w} = (1,0,0,1);$

b) $\vec{v} \approx \vec{w} \iff \exists\, s \in \mathbb{R} \quad s \neq 0 \ \wedge \quad \vec{v} + s \cdot \vec{w} = (0,0,0,0);$