Mathematik für Informatiker III – WS 2009/10

Nachklausur 15.04.2010

Name: ....

Matrikelnummer: .... **Tutor:** ....

Ich bin einverstanden, dass mein Klausurergebnis zusammen mit meiner Matrikelnummer auf einer universitätsinternen Webseite bekannt gegeben wird:

○ **Ja** ○ **Nein**

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Gesamt
Punkte	/8	/8	/6	/4+4	/8	/34+4

Hinweise:
1) Die Lösung der Aufgaben sollte auf dem entsprechenden Aufgabenzettel oder dessen Rückseite zu finden sein. Falls der Platz nicht reicht, kann auch ein Zusatzblatt verwendet werden – in diesem Fall bitte unbedingt einen entsprechenden **Vermerk auf dem Aufgabenblatt** machen.

Verwenden Sie Tinte oder Kugelschreiber (keinen Bleistift!) in den Farben Blau oder Schwarz – die Farbe Rot ist fr die Korrektur reserviert.

3) Achten Sie auf eine ausreichende **Kommentierung** Ihrer Lösungswege. Zur Begründung können alle in der Vorlesung vorgestellten Sätze und Fakten verwendet werden.

4) Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist eine (einseitig) handbeschriebene A4-Seite, mit selbst ausgewählten Formeln, Definitionen und Fakten

5) Da die zweite Hälfte der vierten Aufgabe als Zusatzaufgabe gewertet wird, reichen zum Bestehen 17 Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Matrizen über endlichen Körpern** $5+3$ **Punkte**

a) Lösen Sie die Gleichung $5x + 49 = 0$ über dem Körper $GF(53)$.

b) Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ über dem Körper $GF(5)$.

Hinweis: Der Lösungsweg über die Komplementärmatrix ist hier wahrscheinlich am einfachsten, aber es steht Ihnen frei, auch eine andere Methode einzusetzen.

Aufgabe 2: **Eigenwerte** $2 + 6$ **Punkte**

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix einer Abbildung $f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt im Kern von f.
- Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 2.
- Der dritte Basisvektor $\vec{e_3}$ wird von f auf den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebeildet.

a) Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Basen der Eigenräume von f.

Alternative: Wer Teilaufgabe a) **nicht** gelöst hat, kann auch **ersatzweise** die Eigenwerte und Eigenraumbasen für die folgende Matrix B bestimmen:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: **Euklidische Vektorräume** $3+3$ **Punkte**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u_1} = (2,0,2)$ und $\vec{u_2} = (1,1,1)$ aus den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, welche jeden Vektor $\vec{u}$ aus dem Unterraum $U = \mathrm{Lin}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ identisch abbildet und jeden Vektor $\vec{w}$ aus dem orthogonalen Komplement $U^{\perp}$ auf $2 \cdot \vec{w}$ abbildet.

a) Bestimmen Sie eine Diagonalbasis der Abbildung f.
Hinweis: Orthonormierungsverfahren auf $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{e_3}$ anwenden.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von f,

i) bezüglich der in Teil a berechneten Diagonalbasis und

ii) bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 4: **Stochastik** $1+3$ **Punkte** $+4$ **Zusatzpunkte**

a) Bei einem Zufallsexperiment werden drei Bits B_0, B_1, B_2 unabhängig und jeweils bezüglich einer Bernoulli-Verteilung mit $p = \frac{1}{2}$ erzeugt.
Sei $X = B_0 + 2B_1 + 4B_2$ die auf diese Weise (binär) erzeugte Zahl. Bestimmen Sie $\Pr(X \leq 2)$ (kurze Begründung!!).

b) Wir betrachten das gleiche Experiment wie in a) mit dem einzigen Unterschied, dass $p = \frac{2}{3}$ ist (p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Bit den Wert 1 annimmt). Bestimmen Sie wieder $\Pr(X \leq 2)$. Bestimmen Sie darüber hinaus $E(X)$ (das geht auch fast ohne Rechnen).

c) **Zusatzaufgabe:** Sei B die Scheibe eines Kreises mit dem Radius 2 und p ein zufälliger Punkt aus B bezüglich der Gleichverteilung in B. Bezeichne X die Zufallsvariable, die den Abstand von p zum Kreismittelpunkt beschreibt. Bestimmen Sie das Bild von X, die Verteilungsfunktion f_X und den Erwartungswert $E(X)$ (Hinweis: Ein Kreis mit Radius r hat die Fläche πr^2).

Aufgabe 5: **Vermischtes** 8 **Punkte**

Geben Sie kurze Begründungen für die folgenden beiden Aussagen:

a) Für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ und jeden Endomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gibt es (mindestens) ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass die lineare Abbildung $f + \mu Id_V$ bijektiv ist.

b) Sind $f, g \in \mathrm{Hom}(V, V)$ zwei Endomorphismen eines beliebigen Vektorraums V, so dass $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) > 0$ ist, dann hat der Endomorphismus $(f - g)$ den Eigenwert 0.

c) Untersuchen (und begründen) Sie, ob auch die Umkehrung von b) wahr ist, d.h. ob aus $(f - g)$ hat den Eigenwert 0 folgt, dass $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) > 0$ ist.

d) Wie groß ist (d.h. wie viele Elemente hat) ein 1-perfekter Code $C_1 \subseteq GF(5)^6$ bzw. ein 2-perfekter Code $C_2 \subseteq GF(2)^5$?