

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik  
(F. Hoffmann)

Abgabe: Freitag, den 25. November 2011, 12.00 Uhr

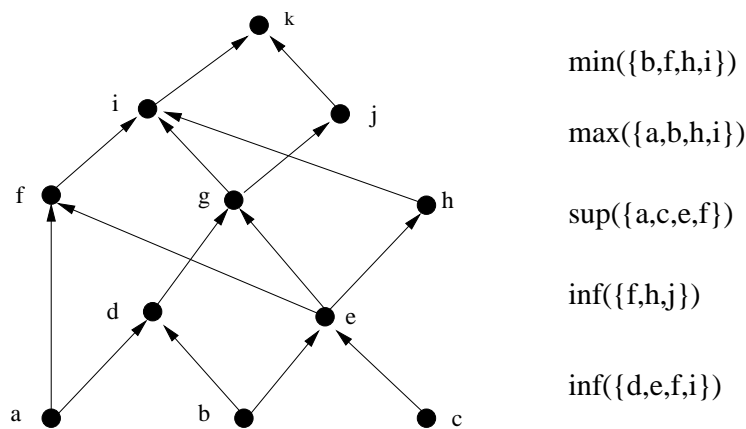
1. **Schranken** (3 Punkte)

Definition: Sei  $M$  eine Teilmenge einer Halbordnung  $(A, \leq)$  und  $b \in A$ .

- $b \in A$  ist obere bzw. untere Schranke von  $M$ , falls  $b \geq a$  bzw.  $b \leq a$  für alle  $a \in M$ .
- $b$  ist Maximum bzw. Minimum von  $M$ , falls  $b \in M$  und  $b$  ist obere bzw. untere Schranke von  $M$  ist.
- $b$  ist Supremum bzw. Infimum von  $M$ , falls  $b$  kleinste obere Schranke bzw. größte untere Schranke von  $M$  ist.

Bestimmen Sie die folgenden Maxima, Minima, Suprema und Infima, falls sie existieren.

Hasse-Diagramm:



2. **Isomorphie zwischen Halbordnungen** (4 Punkte)

Auf der Menge  $\mathbb{B}$  ist mit  $0 \leq 1$  in natürlicher Weise eine Halbordnung definiert. Man kann diese Halbordnung  $(\mathbb{B}, \leq)$  wie folgt auf  $\mathbb{B}^n$  übertragen:

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \preceq (b'_1, b'_2, \dots, b'_n) \iff \forall 1 \leq i \leq n \quad b_i \leq b'_i$$

**Definitionen:** Sind  $(A, \leq)$  und  $(B, \preceq)$  zwei Halbordnungen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion, dann nennt man  $f$  monoton wachsend, wenn für beliebige  $a, a' \in A$  aus  $a \leq a'$  die Eigenschaft  $f(a) \preceq f(a')$  folgt.

Halbordnungen  $(A, \leq)$  und  $(B, \preceq)$  werden isomorph genannt, wenn eine bijektive Funktion  $f : A \rightarrow B$  existiert, so dass sowohl  $f$  als auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  monoton

wachsend sind.

Zeigen Sie, dass für jede  $n$ -elementige Menge  $M$  die Halbordnungen  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  und  $(\mathbb{B}^n, \leq)$  isomorph sind.

**3. Funktionen I** (4 Punkte)

$\mathbb{R}^+$  bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. Drei Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  sind definiert durch  $f(x, y) = xy$ ,  $g(x, y) = |y - 2x + 1|$  und  $h(x) = (x, x^2)$ .

Untersuchen Sie die Funktionen  $f \circ h, g \circ h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $h \circ f, h \circ g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

**4. Funktionen II** (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  genau dann injektiv ist, wenn für jede Menge  $C$  und zwei beliebige Funktionen  $g, h : C \rightarrow A$  aus der Identität  $f \circ g = f \circ h$  die Identität  $g = h$  folgt.

**5. Funktionen III** (5 Punkte)

Für diese Aufgabe sollten Sie Ihr Schulwissen über stetige Funktionen reaktivieren.

Im Folgenden sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $M \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen.  $M$  ist beschränkt, wenn ein  $K \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $|x| \leq K$  für alle  $x \in M$ .

Die Funktion  $f$  ist monoton wachsend (bzw. fallend), falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(y))$$

und  $f$  wird monoton genannt, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Entsprechend wird die Funktion  $f$  streng monoton wachsend (bzw. fallend) genannt, falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ (bzw. } f(x) > f(y))$$

und streng monoton, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Welche der folgenden Implikationen sind wahr bzw. falsch? Jeweils kurze Begründung bzw. Gegenbeispiel.

- (a) Wenn  $f$  stetig und streng monoton wachsend ist, so auch surjektiv.
- (b) Wenn  $f$  stetig und bijektiv ist, so ist es auch monoton.
- (c) Wenn  $M$  beschränkt ist, so ist  $f(M)$  auch beschränkt.
- (d) Wenn  $f$  stetig und  $M$  beschränkt ist, so ist  $f(M) \neq \mathbb{R}$ .
- (e) Wenn  $f$  monoton ist und  $f(M) = \mathbb{R}$ , so ist  $M = \mathbb{R}$ .
- (f) Wenn  $f$  injektiv ist, so ist  $f$  streng monoton.

**Hinweis:** Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!