Musterlösungen zum 12. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Autor: Olaf Parczyk)

1. **Geometrische Verteilungen**

   In den folgenden Spielen wird ein Experiment solange wiederholt, bis eine bestimmte Abbruchbedingung erfüllt ist. Zur Vereinfachung schreiben wir die Beispielergebnisfolgen als Strings ohne Kommata.

   Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel genau über n Runden geht, n fest und $n > 0$, und geben Sie kurze Begründungen.

   (a) Fairer Münzwurf bis zum zweiten Mal Kopf (1) fällt (Bsp: 00001001)

   (b) Fairer Würfel bis zum zweiten Mal 6 fällt (Bsp: 232245616)

   (c) Würfeln bis Augensumme durch 3 teilbar ist (Bsp: 256122, jetzt gilt $3|18$)

   (d) Würfeln mit zwei unabhängigen unterscheidbaren Würfeln bis beide gleiche Zahl zeigen (Bsp: $(1,2)(2,1)(3,6)(5,5)$)

   Lösung: Um die Wahrscheinlichkeit $Pr(A_n)$ zu berechnen, dass ein Spiel genau über n Runden geht bestimmen wir zum Einen die Wahrscheinlichkeit $Pr(B_{n-1})$, dass nach $n-1$ Runden die Abbruchbedingung noch nicht eingetreten ist und zum Anderen die Wahrscheinlichkeit $Pr(C)$, dass diese in der n-ten Runde eintritt. Dann gilt $Pr(A_n) = Pr(B_{n-1} \cap C) = Pr(B_{n-1}) * Pr(C)$, da die Ereignisse jeweils unabhängig sind.

   (a) B: In $n-1$ Runden einmal Kopf und sonst Zahl $Pr(B_{n-1}) = \binom{n-1}{1} 0,5^1 0,5^{n-2}$.
   C: In der n-ten Runde Kopf $Pr(C) = 0,5$.
   A: Fairer Münzwurf bis zum zweiten Mal Kopf $Pr(A_n) = (n-1)0,5^n$.

   (b) B: In $n-1$ Würfen genau einmal 6 $Pr(B_{n-1}) = \binom{n-1}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{n-2}$.
   C: Im n-ten Wurf 6 $Pr(C) = \frac{1}{6}$.
   A: Fairer Würfel bis zum zweiten Mal 6 fällt $Pr(A_n) = (n-1)(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{n-2}$.

   (c) B: In $n-1$ Würfen Augensumme nie durch 3 teilbar. Am Anfang Rest 0, also darf nicht 3 oder 6 kommen und danach entweder Rest 1 oder 2. Es gibt also immer vier Möglichkeiten, so dass der Rest nicht Null wird. $Pr(B_{n-1}) = (\frac{4}{6})^{n-1}$.
   C: Nach dem n-ten Wurf Augensumme durch drei teilbar. Unabhängig davon, was der Rest vorher war gibt es dafür zwei Möglichkeiten. $Pr(C) = \frac{2}{6}$.
   A: Würfeln bis Augensumme durch 3 teilbar ist $Pr(A_n) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$.

   (d) B: In $n-1$ Würfen nicht die gleiche Augenzahl $Pr(B_{n-1}) = (\frac{30}{36})^{n-1}$.
   C: Im n-ten Wurf gleiche Augenzahl $Pr(C) = \frac{6}{36}$.
   A: Würfeln mit zwei unabhängigen unterscheidbaren Würfeln bis beide gleiche Zahl zeigen $Pr(A_n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$

   Die Formeln gelten natürlich alle auch für $n = 1$.

2. **Rekursion I**

   Finden Sie die Anzahl der linearen Anordnungen der Zahlen von 1 bis n, so dass jede

Zahl höchstens eine Stelle von ihrer Position in der Standardanordnung $1 - 2 - \ldots - n$ entfernt ist.
Stellen Sie dazu eine Rekursionsgleichung auf und lösen Sie sie.

Lösung:

Die Startbedingungen sind $a_1 = 1$, denn für eine Zahl gibt es nur eine Möglichkeit, und $a_2 = 2$, weil es für zwei Zahlen zwei Möglichkeiten gibt, von denen keine die Bedingung verletzt.

Jetzt wollen wir die rekursive Formel aufstellen. Dazu betrachten wir eine korrekte Anordnung der Länge $n-1$. Die Zahl n können wir an die n-te Stelle schreiben und erhalten eine korrekte Anordnung der Länge n. Dafür gibt es genau a_{n-1} Möglichkeiten. Die Zahl n könnte aber auch an der $n-1$-ten Position stehen. Das können wir aber nur realisieren, wenn die Zahl $n-1$ an der n-ten Position steht. Die letzten beiden Zahlen sind auch in diesem Fall fest und es ergeben sich dafür a_{n-2} Möglichkeiten. Weiter nach vorne kann die Zahl n nicht gesetzt werden. Deshalb erhalten wir zusammen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Dies entspricht genau der rekursiven Darstellung der Fibonacci-Folge mit um eins nach vorne verschobenen Startbedingungen. Wie wir die exakte Form dafür bestimmen ist uns bereits bekannt. Die Lösung muss natürlich überprüft werden, indem wir die Startbedingungen und die rekursive Gleichung nachrechnen.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

3. **Rekursion II**
Sie legen 100000 Euro zu Beginn dieses Jahres bei einem Investment Fond an. Am Ende jedes Jahres werden zwei Dividenden ausgeschüttet. Und zwar am Ende des ersten und jedes weiteren Jahres 20 Prozent der Einlage in diesem Jahr plus ab dem zweiten Jahr 45 Prozent der Einlage des Vorjahres. Finden Sie eine Rekursionsgleichung für die Größe der Einlage P_n nach n Jahren unter der Annahme, dass die Einlage die ganze Zeit nicht angetastet wird und geben Sie dann eine geschlossene Form für P_n an.

Lösung:

Die Startbedingungen sind $P_0 = 100000$, die Einlage, die nach dem 0-ten Jahr vorhanden ist, und $P_1 = 120000$, die ursprüngliche Einlage zuzüglich 20% Zinsen. Der zweite Zinsertrag kommt hier noch nicht zum Zuge, da vor dem ersten Jahr die Einlage 0 Euro betrug.

Daraus ermitteln wir ganz einfach die rekursive Formel. Nach dem Jahr n entsprechen die Einlagen den Einlagen aus dem Vorjahr plus 20% und zuzüglich 45% der Einlagen aus dem Jahr davor.

$$P_n = 1,2P_{n-1} + 0,45P_{n-2}$$

Jetzt wollen wir die rekursive Formel auflösen in eine explizite Darstellung. Deshalb vermuten wir $P_n = c \cdot x^n$ als Lösung ohne Randbedingung, bekommen $c \cdot x^n = 1,2c \cdot x^{n-1} + 0,45c \cdot x^{n-2}$, teilen durch $c \cdot x^{n-2}$ und erhalten

$$x^2 = 1,2x + 0,45 \Leftrightarrow 0 = (x - 1,5) \cdot (x + 0,3).$$

Die Lösungen sind also $1,5$ und $-0,3$. Als Linearkombination ergibt sich daraus der Ansatz $P_n = c_1(1,5)^n + c_2(-0,3)^n$. Durch einsetzen der Startbedingungen erhalten wir zwei Gleichungen.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 100000 = c_1 + c_2 \\ \text{II} & 120000 = 1,5c_1 - 0,3c_2 \end{array}$$

Wir setzen I in II ein und ermitteln damit die Koeffizienten zu $c_1 = \frac{250000}{3}$ und $c_2 = \frac{50000}{3}$ und erhalten die explizite Formel

$$P_n = \frac{250000}{3}(1,5)^n + \frac{50000}{3}(-0,3)^n.$$

4. **Rekursion III**(wurde korrigiert)
   Finden Sie die Lösung der Rekursionsgleichung

   $$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$$

   mit den Randbedingungen $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$.

5. **Rekursion IV**(wurde korrigiert)
   Lösen Sie die inhomogene Rekursionsgleichung

   $$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$$

   mit der Randbedingung $a_0 = 1$.