Teillösungen zum 10. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Adam Schienle)

1. **Gezinktes**
   Ein Paar von Würfeln ist gezinkt. Bei dem einen tritt Augenzahl 4 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ auf bei dem anderen Augenzahl 3 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$. Die anderen Augenzahlen sind jeweils gleichwahrscheinlich. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf beider Würfel die Augensumme 7 auftritt?

   Lösung:
   Wir bezeichnen die beiden Würfel mit W_1 und W_2. Weiter bestimmen wir den Wahrscheinlichkeitsraum Ω; dieser lässt sich schreiben als

   $$\Omega = \{(w_1, w_2) \mid 1 \leq w_1, w_2 \leq 6\},$$

   dabei bezeichne w_1 bzw. w_2 das Ergebnis von W_1 bzw. W_2. In der Aufgabenstellung ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

   $$E := \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid i + j = 7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

   gefragt. Offenbar sind alle Tupel aus E disjunkt. Daher können wir $\mathbb{P}(E)$ als Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Tupel bestimmen. Beachten wir noch, dass für den Würfel W_1 gilt:

   $$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{2}{7} \text{ und } \mathbb{P}(\{w_1\}) = \frac{1}{7} \text{ für jedes } w_1 \neq 3$$

   sowie für W_2

   $$\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{2}{7} \text{ und } \mathbb{P}(\{w_2\}) = \frac{1}{7} \text{ für jedes } w_1 \neq 4,$$

   dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}((1,6)) &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}, & \mathbb{P}((2,5)) &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}, \\
   \mathbb{P}((3,4)) &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{49}, & \mathbb{P}((4,3)) &= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{49}, \\
   \mathbb{P}((5,2)) &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}, & \mathbb{P}((6,1)) &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}.
   \end{aligned}$$

   Damit ergibt sich

   $$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{49} + \frac{1}{49} + \frac{2}{49} + \frac{2}{49} + \frac{1}{49} + \frac{1}{49} = \frac{8}{49} \approx 0.1533.$$

2. **Vier Würfel** (**Wurde korrigiert.**)
   Sie wählen sich eine Zahl zwischen 1 und 6 und werfen dann 4 faire Würfel. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Würfel Ihre Zahl zeigt?
   Lösungshinweis:
   Man berechne die Gegenwahrscheinlichkeit zum Ereignis, also die Wahrscheinlichkeit, dass *kein* Würfel die gewählte Zahl zeigt.

3. **Vollständige Induktion** (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion dass für $n > 1$ und Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$Pr(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \geq Pr(E_1) + Pr(E_2) + \ldots + Pr(E_n) - (n-1)$$

Lösung:
Zu zeigen ist die Gleichung

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \geq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_n) - (n-1)$$

für beliebiges $n \geq 2$ und Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$. Die Gleichung können wir auch anders aufschreiben:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\right) - (n-1)$$

Wir führen einen Induktionsbeweis. Dazu betrachten wir im *Induktionsanfang* die elementare Gleichungskette

$$1 \geq \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2).$$

Nun stellen wir die Ungleichung etwas um und erhalten

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \geq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1.$$

Damit haben wir den Fall $n = 2$ (und dadurch den Induktionsanfang) bereits gezeigt. Kommen wir nun zum *Induktionsschritt*. Wir nehmen an, dass die Gleichung für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt, und zeigen, dass sie dann auch für den Nachfolger $n+1$ gilt. Dazu stellen wir die Induktionsbehauptung auf:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} E_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_k)\right) - ((n+1)-1)$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} E_k\right) = \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right)}_{=:A} \cap E_{n+1}\Bigg) = \mathbb{P}(A \cap E_{n+1}),$$

was unter Benutzung des gleichen Tricks wie im Induktionsanfang die folgende Ungleichung ergibt:

$$\mathbb{P}(A \cap E_{n+1}) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E_{n+1}) - 1.$$

Setzen wir nun die Induktionsvoraussetzung ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) \cap E_{n+1}\right) &\geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) + \mathbb{P}(E_{n+1}) - 1 \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) - (n-1) + \mathbb{P}(E_{n+1}) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_k) - (n+1),
\end{aligned}$$

und wir sind fertig.

4. **Herz-Dame** (4 Punkte)
5 Karten werden zufällig aus einem Kartenspiel mit 52 Karten gezogen und der Spielerin gegeben. Sie sagt, dass die Herzdame dabei ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie noch eine weitere Dame hat?
Bei einem weiteren Spiel sagt sie wieder, dass sie wenigstens eine Dame hat aber nicht welche. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens zwei Damen hat?

Lösung:

(a) Wir halten zunächst fest, dass es insgesamt jeweils $\binom{52}{5}$ mögliche Blätter gibt. Wenn wir wissen, dass die Herzdame unter den gezogenen Karten ist, dann gibt es noch $\binom{51}{4}$ mögliche Kombinationen.
Suchen wir nun die Anzahl aller für uns günstigen Fälle, das sind diejenigen, bei denen mindestens eine (also entweder eine oder zwei oder drei) weitere Dame vorliegt. Das sind gerade

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{48}{3}+\binom{3}{2}\cdot\binom{48}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{48}{1}$$

Möglichkeiten. Damit ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit[1] von

$$\frac{\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{48}{3}+\binom{3}{2}\cdot\binom{48}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}}=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{48}{3}+\binom{3}{2}\cdot\binom{48}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{51}{4}}\approx 0,221$$

(b) Wir zählen hierfür die Möglichkeiten, genau 1, 2, 3, oder genau 4 Damen auf der Hand zu haben. das sind gerade

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}.$$

Analog bestimmen wir die Möglichkeiten für 2 oder mehr Damen zu

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}.$$

Genau wie in Teil (a) ergibt sich damit eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}\approx 0,123$$

5. **Bernoulli-Experimente** (**Wurde korrigiert**.)
Wir führen n unabhängige Bernoulli-Experimente durch, jedes mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur Misserfolge auftreten?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Erfolg auftritt?

[1] Wir teilen hier günstige durch mögliche Fälle

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Erfolg auftritt?

(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Misserfolge auftreten?

Lösungshinweis:
Hier ist es praktisch, mit Gegenwahrscheinlichkeiten zu rechnen. Außerdem beachte man, dass es bei n Experimenten genau $\binom{n}{1} = n$ Möglichkeiten gibt, bei denen man *genau* einmal Erfolg hat.

6. **5 Kinder** (**Wurde korrigiert.**)
Eine Familie hat 5 Kinder und wie Sie wissen, sind die Geschlechter der Kinder unabhängig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Kind ein Junge war oder dass sie wenigstens zwei Mädchen haben, falls

(a) Junge und Mädchen ist gleichwahrscheinlich,

(b) die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen ist 0.51 oder

(c) die Wahrscheinlichkeit, dass das i–te Kind ein Junge ist, beträgt $0.51 - \frac{i}{100}$.

Lösung: (Autor: Benjamin Strauch)

Wir können die Aufgabe lösen, indem wir das Ereignis A betrachten, bei denen gerade keiner der beiden Fälle erfüllt ist, also weder das erste Kind ein Junge ist, noch es mindestens zwei Mädchen gibt. Dies kann nur genau dann eintreten, wenn das erste Kind ein Mädchen war und alle anderen Kinder Jungen. Alle anderen Möglichkeiten erfüllen nämlich mind. eine der beiden Bedingungen. Unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dass mind. eine der Bedingungen erfüllt ist, erhalten wir dann als $P(E) = 1 - P(A)$.

(a) Da hier beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind haben wir einen Laplaceraum und können die Wahrscheinlichkeit für A berechnen indem wir die eine Möglichkeit durch die Gesamtmöglichkeiten teilen. Mit Gegenwahrscheinlichkeit also: $P(E) = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32}$.

(b) Hier ist die Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0,49 \cdot 0,51^4$, denn wir müssen beim ersten „Versuch" ein Mädchen und dann vier mal Jungs haben. Dann ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(E) = 1 - 0,49 \cdot 0,51^4 \approx 0,967$.

(c) Genau aus den gleichen Gründen wie in b), nur mit anderen Wahrscheinlichkeiten haben wir: $P(A) = (1-(0,51-\frac{1}{100}))\cdot(0,51-\frac{2}{100})\cdot(0,51-\frac{3}{100})\cdot(0,51-\frac{4}{100})\cdot(0,51-\frac{5}{100}) = 0,5\cdot 0,49\cdot 0,48\cdot 0,47\cdot 0,46$. Hierbei ist der erste Faktor die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen, nämlich die Gegenwahrscheinlichkeit zum Jungen als erstes Kind, und die weiteren Terme sind die Wahrscheinlichkeiten für Jungen als jeweilige Kinder.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist nun wieder $P(E) = 1-0,5\cdot 0,49\cdot 0,48\cdot 0,47\cdot 0,46$ was einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0.975 entspricht.