

Lösungen zum 9. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik
(F. Hoffmann)

1. **Viele Kreise**

Beweisen Sie, dass n Kreise in der Ebene, mit $n > 0$, die Ebene in $n^2 - n + 2$ Regionen unterteilen, wenn sich je zwei der Kreise in genau 2 Punkten schneiden und je 3 Kreise keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Lösung: Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 1$. Ein Kreis unterteilt die Ebene in 2 Regionen.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage gilt für n Kreise (Induktionsannahme). Beim Zeichnen des $(n + 1)$ -sten Kreises entstehen genau $2n$ Schnittpunkte mit den schon vorhandenen n Kreisen, anders gesagt der neue Kreis wird in $2n$ Kreisbögen zerlegt. Jeder dieser Kreisbögen zerlegt eine schon vorhandene Region in zwei Regionen, es entstehen also $2n$ neue Regionen.

$$n^2 - n + 2 + 2n = (n + 1)^2 - 2n - 1 - n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage für alle $n > 0$ bewiesen.

2. **Vollständige Induktion**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1$, offensichtlich gilt $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$

Induktionsschritt: Nehmen wir an, die Aussage ist richtig für n , also

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Zu zeigen ist die Induktionsbehauptung:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2} - 1)$$

Dies folgt aus der Induktionsannahme, falls wir zeigen:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2} - 1)$$

Durch Umformen erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

Durch Multiplizieren mit $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ ergibt sich wiederum die äquivalente Aussage:

$$\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} + 1 > 2$$

Dies ist eine wahre Aussage für alle n und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage in der Aufgabe für alle $n > 0$ bewiesen.

3. Abzählen I

Bei einer Weihnachtstombola kaufen 100 Leute je ein Los, die Lose sind von 1 bis 100 durchnummeriert. Es werden 4 Preise ausgelost, darunter der Hauptpreis (eine Reise nach Berlin-Dahlem) und drei identische weitere Preise.

- (a) Wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es insgesamt und wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es, wenn die Person mit Los 13 einen Preis bekommt?

Lösung: Insgesamt $\binom{100}{4} \cdot 4 = 15654900$ Möglichkeiten, zunächst die 4 Gewinner auszusuchen und dann einem davon den Hauptpreis zu geben. Wenn die Person mit Los 13 einen Preis bekommt, dann sind es $\binom{99}{3} \cdot 4 = 627396$ Möglichkeiten.

- (b) Wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es, wenn die Person mit Los 13 nicht den Hauptpreis gewinnt?

Lösung: $\binom{99}{4} \cdot 4 + \binom{99}{3} \cdot 3 = 15528051$ Möglichkeiten, denn entweder gewinnt die 13 gar nichts oder einen der Trostpreise.

- (c) Wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es, wenn die Person mit Los 13, die mit Los 42 und die mit Los 99 je einen Preis gewinnen?

Lösung: 97 Möglichkeiten, wenn die drei die Trostpreise bekommen plus $3 \cdot 97$ Möglichkeiten, wenn einer der drei den Hauptpreis hat also zusammen 388 Möglichkeiten.

- (d) Wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es, wenn eine der Personen mit Los 13, 42, 77 oder Los 99 den Hauptpreis gewinnt?

Lösung: $4 \cdot \binom{99}{3} = 627396$

- (e) Wieviele Möglichkeiten der Preisverteilung gibt es, wenn die Personen mit Los 13 und 42 Preise gewinnen, die mit den Losen 77 und 99 aber nicht?

Lösung: $\binom{96}{2} \cdot 4 = 18240$ Möglichkeiten, die restlichen 2 Gewinner zu wählen und den Hauptpreis zu vergeben.

4. Abzählen II

Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

wobei die $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ nichtnegative ganze Zahlen sind und die Nebenbedingungen $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 5, x_4 \leq 8$ erfüllen.

Tipp: Berechnen Sie zunächst die Anzahl aller Lösungen und ziehen dann die Anzahl der Lösungen ab, die wenigstens eine der Nebenbedingungen verletzen.

Lösung:

Ohne Nebenbedingungen gibt es $\binom{20}{3}$ Lösungen. Darunter sei L_i die Menge der Lösungen, die die Nebenbedingung für x_i verletzen.

Mit Inklusion-Exklusion berechnen wir $|L| = |L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4|$. Dazu ist:

$$|L_1| = \binom{20-4}{3} = \binom{16}{3}, \quad |L_2| = \binom{15}{3}, \quad |L_3| = \binom{14}{3}, \quad |L_4| = \binom{11}{3}$$

Wir brauchen die paarweisen Durchschnitte:

$$|L_1 \cap L_2| = \binom{11}{3}, \quad |L_1 \cap L_3| = \binom{10}{3}, \quad |L_1 \cap L_4| = \binom{7}{3}, \quad |L_2 \cap L_3| = \binom{9}{3}, \quad |L_2 \cap L_4| = \binom{6}{3},$$

$$|L_3 \cap L_4| = \binom{5}{3}$$

Hier der einzige nichtleere Tripel-Durchschnitt:

$$|L_1 \cap L_2 \cap L_3| = \binom{5}{3}$$

Damit ergibt sich:

$$|L| = \binom{16}{3} + \binom{15}{3} + \binom{14}{3} + \binom{11}{3} - \binom{11}{3} - \binom{10}{3} - \binom{7}{3} - \binom{9}{3} - \binom{6}{3} - \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 1120$$

Damit gibt es $1140 - 1120 = 20$ Lösungen, die allen Nebenbedingungen gleichzeitig genügen.