Teillösungen zum 5. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Huy Le-Duc, F. Hoffmann)

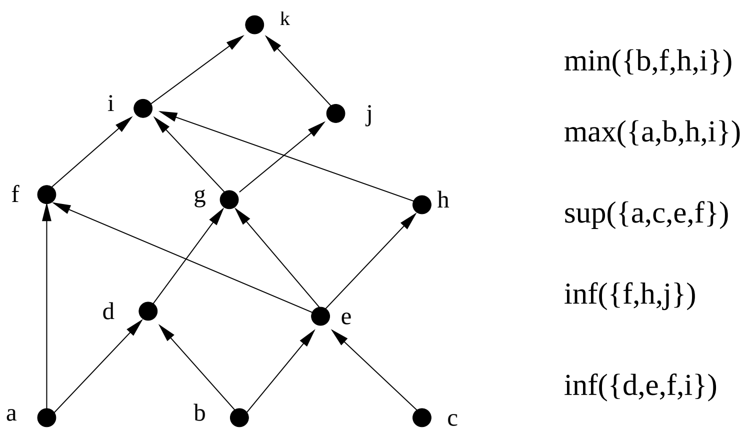
1. **Schranken**

   Definition: Sei M eine Teilmenge einer Halbordnung $(A, \leq)$ und $b \in A$.

   - $b \in A$ ist obere bzw. untere Schranke von M, falls $b \geq a$ bzw $b \leq a$ für alle $a \in M$.
   - b ist Maximum bzw. Minimum von M, falls $b \in M$ und b ist obere bzw. untere Schranke von M ist.
   - b ist Supremum bzw. Infimum von M, falls b kleinste obere Schranke bzw. größte untere Schranke von M ist.

   Bestimmen Sie die folgenden Maxima, Minima, Suprema und Infima, falls sie existieren.

   Hasse-Diagramm:



   Lösung:

$$\min(\{b, f, h, i\}) = b, \max(\{a, b, h, i\}) = i, \sup(\{a, c, e, f\}) = f, \inf(\{f, h, j\}) = e,$$
$$\inf(\{d, e, f, i\}) = b$$

2. **Isomorphie zwischen Halbordnungen**

   Auf der Menge $\mathbb{B}$ ist mit $0 \leq 1$ in natürlicher Weise eine Halbordnung definiert. Man kann diese Halbordnung $(\mathbb{B}, \leq)$ wie folgt auf $\mathbb{B}^n$ übertragen:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \preceq (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) \iff \forall\ 1 \leq i \leq n \quad b_i \leq b'_i$$

   Definitionen: Sind $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ zwei Halbordnungen und $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion, dann nennt man f monoton wachsend, wenn für beliebige $a, a' \in A$ aus $a \leq a'$ die

Eigenschaft $f(a) \preceq f(a')$ folgt.
Halbordnungen $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ werden isomorph genannt, wenn eine bijektive Funktion $f : A \longrightarrow B$ existiert, so dass sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} monoton wachsend sind.
Zeigen Sie, dass für jede n-elementige Menge M die Halbordnungen $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ und $(\mathbb{B}^n, \preceq)$ isomorph sind.
Lösung: Es sei $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Wir betrachten folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(M) &\longrightarrow \mathbb{B}^n \\ A &\longmapsto (b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

mit $b_i = 1$ falls $a_i \in A$ und $b_i = 0$ sonst. Bleibt zu zeigen f ist injektiv, surjektiv und verträglich mit den Halbordungsrelationen.

***f* ist injektiv:** Es sei $f(A) = f(A')$ d.h. beide $0-1$-Sequenzen sind gleich. Also ist für jedes $a_i \in M$ $a_i \in A$ genau dann, wenn $a_{\in} A'$. Daraus folgt $A = A'$ also ist f injektiv.

***f* ist surjektiv:** Es sei eine $0-1$-Sequenz $(b_i)_{i \in \{1,2,3,\ldots,n\}} \in \mathbb{B}^n$ gegeben. Also wählen wir genau die Menge $A \in \mathcal{P}(M)$, die die Elememte a_i enthält, bei denen $b_i = 1$ ist. Damit gilt $f(A) = (b_i)_{i \in \{1,2,3,\ldots,n\}}$ und f ist surjektiv. Also ist f eine Bijektion.

***f* und f^{-1} monoton wachsend:** Es gilt:

$$\begin{aligned} A \subseteq A' &\Leftrightarrow \forall a_i \in M : a_i \in A \;\Rightarrow a_i \in A' \\ &\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n : i\text{-te Komponente von } f(A) \leq i\text{-te Komponente von } f(A') \\ &\Leftrightarrow f(A) \preceq f(A') \end{aligned}$$

3. **Funktionen I**
$\mathbb{R}^+$ bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. Drei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sind definiert durch $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = |y - 2x + 1|$ und $h(x) = (x, x^2)$.
Untersuchen Sie die Funktionen $f \circ h, g \circ h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h \circ f, h \circ g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

4. **Funktionen II**
Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ genau dann injektiv ist, wenn für jede Menge C und zwei beliebige Funktionen $g, h : C \longrightarrow A$ aus der Identität $f \circ g = f \circ h$ die Identität $g = h$ folgt.

Lösung:
($\Leftarrow$): (Kontraposition) Angenommen f ist nicht injektiv, d.h., es gibt $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ und $f(a) = f(a')$. Sei $C = \{c\}$ eine einelementige Menge und die Funktionen $g, h : C \longrightarrow A$ seien definiert durch $g(c) = a$ bzw. $h(c) = a'$. Dann ist $f \circ g = f \circ h$ aber $g \neq h$.
($\Rightarrow$): Angenommen, f ist injektiv und sei eine beliebige Menge C gegeben und Funktionen $g, h : C \longrightarrow A$ mit $f \circ g = f \circ h$. Zu zeigen ist $g = h$, das heißt: $\forall c \in C : g(c) = h(c)$. Wissen $\forall c \in C : f \circ g(c) = f \circ h(c)$ nach Voraussetzung. Aber $f(g(c)) = f \circ g(c) =$

$f \circ h(c) = f(h(c))$. Wegen Injektivität von f folgt die Behauptung, denn für injektives f gilt: $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

5. **Funktionen III**
Für diese Aufgabe sollten Sie Ihr Schulwissen über stetige Funktionen reaktivieren.
Im Folgenden sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. M ist beschränkt, wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|x| \leq K$ für alle $x \in M$.
Die Funktion f ist monoton wachsend (bzw. fallend), falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)(\text{bzw.} f(x) \geq f(y))$$

und f wird monoton genannt, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Entsprechend wird die Funktion f streng monoton wachsend (bzw. fallend) genannt, falls

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)(\text{bzw.} f(x) > f(y))$$

und streng monoton, wenn sie eine dieser beiden Eigenschaften hat. Welche der foldenden Implikationen sind wahr bzw. falsch? Jeweils kurze Begründung bzw. Gegenbeispiel.

(a) Wenn f stetig und streng monoton wachsend ist, so auch surjektiv.

(b) Wenn f stetig und bijektiv ist, so ist es auch monoton.
Lösung: Indirekter Beweis: Sei f nicht monoton. Es gibt also Argumente $a < b < c$ mit Fall 1: $f(a) < f(b)$ und $f(c) < f(b)$ oder Fall 2: $f(a) > f(b)$ und $f(c) > f(b)$. Im Fall 1 gibt es nach dem Mittelwertsatz Argumente $b' \in (a, b)$ und $c' \in (b, c)$ mit $f(b') = f(c')$, da alle Werte in den Intervallen $[f(a), f(b)]$ und $[f(c), f(b)]$ als Funktionswerte angenommen werden. Fall 2 analog. Dies steht aber im Widerspruch zu der Bijektivität.

(c) Wenn M beschränkt ist, so ist $f(M)$ auch beschränkt.
Lösung: Ist falsch. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} f : (0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(d) Wenn f stetig und M beschränkt ist, so ist $f(M) \neq \mathbb{R}$.
Lösung: Gegenbeispiel

$$\begin{aligned} f : (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) \end{aligned}$$

(e) Wenn f monoton ist und $f(M) = \mathbb{R}$, so ist $M = \mathbb{R}$.
Lösung: Ist falsch. Gegenbeispiel: Betrachte $\tan(x)$ auf dem Intervall $M = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

(f) Wenn f injektiv ist, so ist f streng monoton.