Teillösungen zum 4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(Dennis Voß, F. Hoffmann)

1. **Verständnis**

   (a) Wieviele verschiedene n–stellige Boolesche Funktionen f gibt es, so dass für beliebige Argumente $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ gilt:

   $$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(\neg b_1, \neg b_2, \ldots, \neg b_n)$$

   Begründung!
   Lösung: Es sind $2^{2^{n-1}}$ viele Funktionen. Mit der Festlegung eines Funktionswertes $f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist auch $f(\neg b_1, \neg b_2, \ldots, \neg b_n)$ bestimmt. Damit müssen nur 2^{n-1} der 2^n Zeilen in der Wertetabelle ausgefüllt werden.

   (b) Wir betrachten die folgende Aussageform: $Q(x, y, z): \quad x \cdot y = z$
   Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden drei Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten:
   $\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}:\ Q(x, y, z)$
   $\forall z \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}:\ Q(x, y, z)$
   $\exists x \in \mathbb{Q}\ \forall z \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q}:\ Q(x, y, z)$

2. **Eigenschaften von Relationen**

   Welche der folgenden Relationen in der Menge Σ^+ der nichtleeren Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv? Dabei heißt irreflexiv, dass kein Element zu sich selbst in Beziehung steht.

   (a) $R_1 = \{(v, w) | v, w$ haben keinen gemeinsamen Buchstaben$\}$
   (b) $R_2 = \{(v, w) || v| < |w|\}$.

   Lösung:
   zu (a) R_1 ist offensichtlich irreflexiv und symmetrisch.
   R_1 ist aber nicht transitiv, da aus $(v, w), (w, x) \in R_1$ nicht folgt, dass notwendigerweise $(v, x) \in R_1$ gilt. Denn v und x können gleiche Buchstaben haben, die aber in w nicht enthalten sind.
   zu (b) R_2 ist irreflexiv, da offensichtlich $|v| = |v|$ gilt.
   R_2 ist antisymmetrisch, da aus $|v| < |w|$ folgt, dass nicht $|w| < |v|$ gilt.
   R_2 ist transitiv, da aus $|v| < |w|$ und $|w| < |x|$ folgt, dass $|v| < |x|$. Man beachte, dass die Länge eines Wortes eine natürliche Zahl ist.

3. **Äquivalenzrelationen**

   (a) Wir betrachten $R = \{(x, y) | x - y \in \mathbb{Z}\}$ als Relation in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die Äquivalenzklasse von $1/2$.

(b) Wieviele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es in $A = \{a, b, c, d\}$? Begründung.

4. **Fast Äquivalenzrelationen**

Wie Sie wissen sind Äquivalenzrelationen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit diese Definition sinnvoll ist, sollten Sie Beispiele für Relationen angeben können, die

(a) reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv sind;
Lösungsbeispiel: $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | x$ und y haben gemeinsame Ziffer in Dezimaldarstellung$\}$
Dies ist nicht transitiv: Denn z.B. $(4, 34) \in R$ und $(34, 3) \in R$ aber $(4, 3) \notin R$

(b) reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch sind;
Lösungsbeispiel: Die Halbordnungsrelation $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ a|b\}$ ist nicht symmetrisch, denn zum Beispiel ist $(3, 9) \in R$ aber $(9, 3) \notin R$.

(c) symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv sind.
Lösungsbeispiele: leere Relation oder aber Grundmenge $A = \{a, b, c\}$ und als Relation $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$.

5. **Schach und Relationen**

Gegeben ist ein Schachbrett, dessen Felder wir mit Koordinatenpaaren $(i, j) \in B = \{1, 2, \ldots, 8\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$ beschreiben. (Z.B. bezeichnet $(1, 1)$ das Feld links unten). Die folgenden Relationen setzen zwei Felder zueinander in Beziehung, wenn das zweite vom ersten Feld aus mit einem Turm-, Läufer- oder Springerzug erreichbar ist:

Turm : $(a, b)\ T\ (c, d) \Leftrightarrow (a = c \vee b = d) \wedge |a - c| + |b - d| > 0.$
Springer: $(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow |c - a| \cdot |d - b| = 2.$
Läufer: $(a, b)\ L\ (c, d) \Leftrightarrow |c - a| = |d - b| \neq 0.$

(a) Offensichtlich beschreiben die Relationen $T \circ T,\ S \circ S,\ L \circ L$ die Erreichbarkeit in jeweils genau zwei Zügen. Bestimmen Sie die drei Mengen der von $(1, 1)$ mit $T \circ T,\ S \circ S$, und $L \circ L$ erreichbaren Felder.
Lösung: Mit genau zwei Turmbewegungen kann man jedes Feld (a, b), etwa für $a \neq 1$ und $b \neq 1$ mittels $(1, 1)T(a, 1)$ und $(a, 1)T(a, b)$.
Mit genau einer Springerbewegung lassen sich von $(1, 1)$ die mit einem Kreuz markierten Felder erreichen, mit zwei Zügen die mit Punkt markierten Felder.

○		○		
			○	
○	×			○
		×		
○ (1,1)		○		○ (1,5)

Mit genau zwei Läuferbewegungen lassen sich von $(1,1)$ alle $(a,b) \in B$ erreichen, mit $a+b$ ist gerade. Dies sind alle schwarzen Felder. Das ist klar für Felder (a,a) und für Felder (a,b) mit $a \neq b$ haben wir: $(1,1)L((a+b)/2,(a+b)/2)$ und $((a+b)/2,(a+b)/2)L(a,b)$.

(b) Welche der Verknüpfungen $T \circ T,\ S \circ S,\ L \circ L$ und $(L \circ L) \cup L$ sind Äquivalenzrelationen?
Begründen Sie positive Antworten durch Beschreibung der Äquivalenzklassen und negative Antworten durch einen konkreten Nachweis, dass eine Eigenschaft verletzt ist.
Lösung: $S \circ S$ ist zwar reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv. Zum Beispiel $(1,1)S \circ S(1,5)$ und $(1,5)S \circ S(5,5)$ jedoch nicht $(1,1)S \circ S(5,5)$.
$L \circ L$ ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.
Zum Beispiel: $(1,2)L \circ L(3,2)$ und $(3,2)L \circ L(2,1)$ jedoch nicht $(1,2)L \circ L(2,1)$.
Aber $L \circ L \cup L$ ist Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen, den schwarzen und weißen Feldern: also alle Felder (a,b) mit $a+b$ gerade bzw. alle Felder (a,b) mit $a+b$ ungerade.