

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik  
(Autor: Adam Schienle)

1. Quantoren

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktion. Sie erinnern an die Grenzwertdefinition:  $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  heißt Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $a$ , falls für jedes reelle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass aus  $0 < |x - a| < \delta$  folgt  $|f(x) - g| < \epsilon$ .

Schreiben Sie dies als prädikatenlogische Formel mit Quantoren und negieren Sie diese anschließend. In der negierten Form sollte kein  $\neg$  und kein Betragszeichen vorkommen.

**Lösung:**

Unter Benutzung der Aufgabenstellung schreiben wir die Grenzwertdefinition in eine prädikatenlogische Formel um.

Eine Zahl  $g$  heißt Grenzwert einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $a$  (in Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ ) genau dann, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - g| < \epsilon) \quad (*)$$

Die Negation der Aussage (\*) ergibt dementsprechend:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ (\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - g| < \epsilon))) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \neg(\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \neg(0 < |x - a| < \delta) \vee (|f(x) - g| < \epsilon)) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : \neg(\neg((0 < |x - a|) \wedge (|x - a| < \delta)) \vee (|f(x) - g| < \epsilon)) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : (0 < |x - a| \wedge |x - a| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - g| < \epsilon) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : (0 < |x - a|) \wedge (|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - g| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Zur Entfernung der Betragszeichen beachten wir zunächst, dass aus  $|y| < c$  die Ungleichungskette  $-c < y < c$  folgt. Außerdem ist  $0 < |x - a|$  genau dann, wenn  $x \neq a$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : (0 < |x - a|) \wedge (|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - g| \geq \epsilon) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : (x \neq a) \wedge (-\delta < x - a < \delta) \wedge ((f(x) - g \geq \epsilon) \vee (f(x) - g \leq -\epsilon)) \\ \equiv & \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ : (x \neq a) \wedge (a - \delta < x < a + \delta) \wedge ((f(x) \geq g + \epsilon) \vee (f(x) \leq g - \epsilon)) \end{aligned}$$

2. Eigenschaften von Mengen

Welche Schlussfolgerungen für die Mengen  $A$  und  $B$  kann man aus den folgenden Voraussetzungen ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten!

- a)  $A \cup B = A \cap B$       b)  $A \setminus B = A$   
c)  $A \setminus B = B$       d)  $A \setminus B = B \setminus A$

**Lösung:**

- (a) Offenbar ist  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ , analog  $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ . Wegen der Gleichheit der Mengen  $A \cup B$  und  $A \cap B$  folgt  $A \cap B = A = A \cup B$  genauso wie  $A \cap B = B = A \cup B$ . Wir erhalten  $A = B$ .
- (b) Sei  $A \setminus B = A$ . Die Gleichung ist für  $A \cap B = \emptyset$  erfüllt (wir entfernen nur Elemente aus  $A$ , die nicht in  $A$  vorkommen). Angenommen, es existierte eine Lösung mit  $A \cap B \neq \emptyset$ . Dann gibt es aber ein  $x \in A \cap B$ , was  $x \in A$  impliziert. Weiter erhalten wir  $x \notin A \setminus B$  im Widerspruch zur Gleichheit der Mengen.
- (c) Sei  $A \setminus B = B$ . Diese Gleichung kann nur die Lösung  $A = B = \emptyset$  haben ( $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$ ). Denn sei  $A \neq \emptyset$ : Dann folgt die Existenz eines  $x \in A$ . Für  $B = \emptyset$  ist  $A \setminus B \neq \emptyset = B$  (Widerspruch!), wir betrachten also den Fall  $A, B \neq \emptyset$ . Wir können aber nicht die Elemente aus  $A$  entfernen, die in  $B$  liegen, und gleichzeitig wieder die Menge  $B$  erhalten. Es folgt  $A = B = \emptyset$ .
- (d) Sei  $A \setminus B = B \setminus A$ . Für  $A = B$  folgt offenbar  $A \setminus A = \emptyset = A \setminus A$ , also eine wahre Aussage. Nehmen wir an, dass  $A \neq B$  ist, so ergibt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz eines  $x \in A$  mit der Eigenschaft  $x \notin B$ . Es folgt  $x \in A \setminus B$ , aber  $x \notin B \setminus A$ , Widerspruch.

**3. Eigenschaften von Mengenoperationen**

Beweisen Sie für beliebige Mengen  $A, B, C$ .

(a)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**Lösung:**

Zu zeigen ist die Assoziativität des Schnittoperators. Dazu wählen wir ein beliebiges  $x \in A \cap (B \cap C)$ . Dann gilt:

$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cap C)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C))$$

Aufgrund der Assoziativität des logischen  $\wedge$ -Operators können wir die Gleichung umklammern und erhalten

$$(x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C).$$

Umgeschrieben in die mengentheoretische Schreibweise ergibt sich

$$((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C.$$

Weil  $x \in A \cap (B \cap C)$  beliebig war, ist die Gleichung bewiesen.

(b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Lösung:**

Auch die Distributivität zeigen wir unter Benutzung der entsprechenden logischen Gesetze. Sei dazu  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Dann gilt:

$$(x \in A) \vee (x \in B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)).$$

Ausnutzen der logischen Distributivität ergibt den Term

$$((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C)),$$

mengentheoretisch also

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung.

(c)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

**Lösung:** Sei diesmal  $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ . Dann gilt:

$$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \equiv (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

Wir führen die Bezeichnungen  $a$  für  $x \in A$ ,  $b$  für  $x \in B$  und  $c$  für  $x \in C$  mit den entsprechenden Negationen ein. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & a \wedge \neg c \wedge (\neg b \vee c) \\ \equiv & (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c \wedge c) \\ \equiv & (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (a \wedge \text{false}) \\ \equiv & (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee \text{false} \\ \equiv & (a \wedge \neg c \wedge \neg b) \\ \equiv & (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C) \\ \equiv & x \in (A \setminus B) \setminus C. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

#### 4. Symmetrische Mengendifferenz

Seien  $A$  und  $B$  Untermengen einer Grundmenge  $U$ . Zeigen Sie:

(a)  $A \oplus \emptyset = A$

**Lösung:**

Wir nehmen ein  $x \in (A \oplus \emptyset)$  an. Dann können wir für dieses  $x$  umformen:

$$x \in (A \oplus \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A) \oplus (x \in \emptyset),$$

mit der logischen XOR-Verknüpfung  $\oplus$ . Offenbar ist  $x \in \emptyset$  *false*. Damit ergibt sich:

$$(x \in A) \oplus (x \in \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A) \oplus 0 \Leftrightarrow x \in A$$

nach den Regeln für den XOR-Operator. Damit folgt  $A \oplus \emptyset = A$ .

(b)  $(A \oplus B) \oplus B = A$

**Lösung:**

Sei  $x \in (A \oplus B) \oplus B$ . Dann gilt:

$$x \in (A \oplus B) \oplus B \Leftrightarrow x \in (A \oplus B) \oplus (x \in B) \Leftrightarrow ((x \in A) \oplus (x \in B)) \oplus (x \in B)$$

Wir führen die Variablen  $a$  für  $x \in A$  und  $b$  für  $x \in B$  ein. Damit reduziert sich der obige Term zu

$$(a \oplus b) \oplus b.$$

Der XOR-Operator ist assoziativ, wir können also umklammern:

$$(a \oplus b) \oplus b \equiv a \oplus (b \oplus b).$$

Die Operation  $b \oplus b$  ist immer *false*, es ergibt sich  $a \oplus 0$  und nach Teil a) gilt

$$a \oplus 0 \equiv (x \in A) \oplus x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A.$$

(c) Was können Sie über  $A$  und  $B$  sagen, falls  $A \oplus B = A$ ?

**Lösung:**

Nach Teil a) der Aufgabe erhalten wir als Lösung sofort  $B = \emptyset$ ,  $A$  beliebig. Zu zeigen bleibt lediglich, dass dies die einzig mögliche Lösung ist. Dazu nehmen wir an, dass  $B \neq \emptyset$  auch eine Lösung ist, und führen diese Annahme zum Widerspruch. Sei also  $B \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $x \in B$ . Wir unterscheiden den Fall  $x \in A$  und  $x \notin A$ . Für  $x \in A$  ist  $x \notin (A \oplus B)$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Für  $x \notin A$  ist  $x \in (A \oplus B)$ , ebenfalls im Widerspruch zur Voraussetzung, und wir sind fertig: Die einzige Lösung ist  $B = \emptyset$ ,  $A$  beliebig.

(d)  $\oplus$  ist assoziativ.

**Lösung:**

Die Assoziativität des mengentheoretischen XOR-Operators führen wir auf die bereits bekannte Assoziativität des entsprechenden logischen Operators zurück. Dafür nehmen wir drei Mengen  $A, B, C$  an. Sei also  $x \in (A \oplus B) \oplus C$ . Dann gilt

$$x \in (A \oplus B) \oplus C \Leftrightarrow ((x \in A) \oplus (x \in B)) \oplus (x \in C).$$

Umklammern ergibt das gewünschte Ergebnis

$$((x \in A) \oplus (x \in B)) \oplus (x \in C) \Leftrightarrow (x \in A) \oplus ((x \in B) \oplus (x \in C)) \Leftrightarrow x \in A \oplus (B \oplus C).$$

## 5. Mengenfamilien

Für jede natürliche Zahl  $i > 0$  sei die Menge  $A_i = \{0, i, 2i, 3i, \dots\}$ ,  $B_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$  gegeben. Bestimmen Sie (mit Begründung) die Vereinigungen  $\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$  und  $\bigcup_{i=1}^n B_i$

und die Durchschnitte  $\bigcap_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$  sowie  $\bigcap_{i=1}^n B_i$ .

**Lösung:**

Wir beobachten zunächst, dass  $A_1 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$  und  $B_1 = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^+$  gilt. Damit ist  $A_i \subset A_1$  und  $B_i \subset B_1$  für jedes  $i > 0$ . Es folgen sofort

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i = A_1 = \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^n B_i = B_1 = \mathbb{N}^+.$$

Betrachten wir nun die Schnittmengen. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Damit ergibt sich

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap \{0, 3, 6, 9, \dots\} = \{0, 6, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge 3 \mid n\}.$$

Setzt man fort, so erhalten wir als Schnitt

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i = \{n \in \mathbb{N} : k \mid n \forall k \in \mathbb{N}^+\} = \{0\}.$$

Betrachten wir nur die Mengen  $B_i$ , so stellen wir zunächst  $B_i \subset B_{i_0}$  für jedes  $i \geq i_0$  fest. Schneiden wir nun  $B_{i+1}$  mit  $B_i$ , so erhalten wir als Ergebnis gerade  $B_{i+1}$ . Analog bekommen wir

$$\bigcap_{i=1}^n B_i = B_n = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots\}$$