Mathematik für Informatiker I **WS 10/11**

3. Übung **Abgabe: 15.11.2010 bis 16:00 Uhr**

Aufgabe 1: **DNF** 6 Punkte

Wie Sie wissen, kann man jede Bitfolge und damit jedes Bittupel als natürliche Zahl interpretieren. Wir wollen das in dieser Aufgabe für 4-Tupel wie üblich festlegen:

$Z(a_3, a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot 2^i.$

Finden Sie für die folgenden Booleschen Funktionen **möglichst einfache** Darstellungen als DNF. Denken Sie immer zuerst darüber nach, ob Sie wirklich die kanonische DNF konstruieren müssen, oder ob Sie durch andere Überlegungen schneller und eleganter zum Ziel kommen (welche Tupel aus $f^{-1}(1)$ kann man zusammenfassen).

$$f(x,y,z,u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Z(x,y,z,u) \text{ nicht durch 4 teilbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x,y,z,u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Z(x,y,z,u) \geq 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x,y,z,u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Z(x,y,z,u) \text{ keine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: **Vollständige Signaturen** 8 Punkte

Welche der folgenden logischen Signaturen sind vollständig? Zur Begründung positiver Antworten reicht es zu zeigen, dass sich alle Operationen einer bekannten vollständigen Signatur durch die Operationen der Signatur aus der Aufgabenstellung simulieren lassen. Negative Antworten werden in der Regel durch Beispiele von Funktionen begründet, die man mit der Signatur nicht darstellen kann. Das Finden eines geeigneten Beispiels wird schon als erster Lösungsschritt bewertet, aber zu einer kompletten Lösung gehört natürlich auch eine Begründung. Sie können alle in der Vorlesung gezeigten Fakten verwenden und auf die dort bewiesenen Unvollständigkeitsargumente zurückgreifen.

a) $\Sigma_1 = \{1, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ b) $\Sigma_2 = \{\rightarrow, \oplus\}$
c) $\Sigma_3 = \{0, \vee, \leftrightarrow\}$ d) $\Sigma_4 = \{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$

Aufgabe 3: **Monotone Boolesche Funktionen** 4+4 Punkte

Definition:

1) Auf der Menge n-Tupel $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ führen wir eine Ordnungsrelation $\preceq$ ein: $(b_1, \ldots, b_n) \preceq (c_1, \ldots, c_n)$ genau dann, wenn $b_i \leq c_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, wobei sich das $\leq$ von den Zahlen auf die Wahrheitswerte überträgt.

2) Man nennt eine Boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ **monoton**, wenn für zwei beliebige Tupel aus der Bedingung $(b_1, \ldots, b_n) \preceq (c_1, \ldots, c_n)$ folgt, dass $f(b_1, \ldots, b_n) \leq f(c_1, \ldots, c_n)$.

a) Zeigen Sie mit Terminduktion, dass jede Formel über der Signatur $\{0, 1, \vee, \wedge\}$ eine monotone Boolesche Funktion repräsentiert. Für den Induktionsschritt ist eine Unterscheidung von neun Fällen notwendig, die man in einer Tabelle ausführen kann.

b) Zeigen Sie, dass alle monotonen Booleschen Funktionen mit der Signatur $\{0, 1, \vee, \wedge\}$ (also ohne Negation) dargestellt werden können. Argumentieren Sie mit einer geeigneten Abwandlung der kanonischen DNF!