Musterlösung zum 15. Aufgabenblatt vom Donnerstag, den 04. Februar 2010 zur Vorlesung

# MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(G. Sklyarenko)

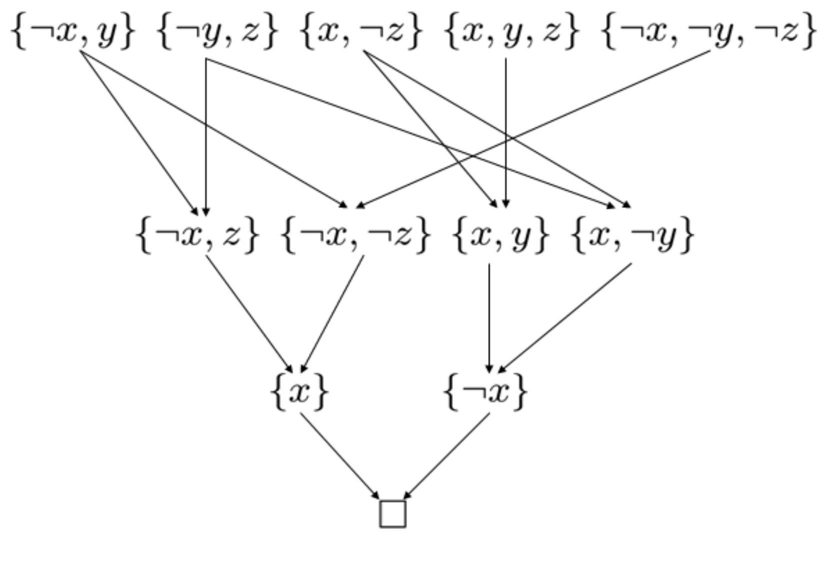
1. **Resolution I**

   Zeigen Sie mittels Resolutionsmethode, dass $x \wedge y \wedge z$ eine Folgerung ist aus der Klauselmenge

   $$F = \{\{\neg x, y\}, \{\neg y, z\}, \{x, \neg z\}, \{x, y, z\}\}$$

   *Lösungsvorschlag:*

   Es ist zu zeigen, dass $F \Rightarrow x \wedge y \wedge z$ Tautologie ist. Da $(F \Rightarrow x \wedge y \wedge z) \Leftrightarrow (\neg F \vee x \wedge y \wedge z)$, ist es äquivalent zu zeigen, dass die Klauselmenge $\neg\Big(\neg F \vee x \wedge y \wedge z\Big)$ unerfüllbar ist. Diese sieht folgendermaßen aus:




2. **Resolution II**

   Sei t die Formel

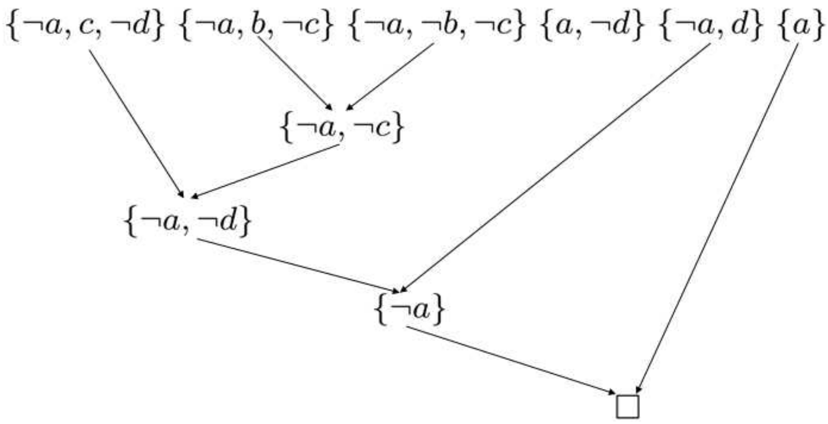
   $$t = (a \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge d) \vee (a \wedge \neg d) \vee \neg a$$

   Zeigen Sie mit dem Resolutionsverfahren, dass t Tautologie ist. Stellen Sie den Resolutionsbeweis graphisch dar!

   *Lösungsvorschlag:*

   t ist Tautologie $\Leftrightarrow \neg t$ ist unerfüllbar.

   Resolutionsgraph:




3. **Resolution III**
Lösen Sie auch die folgenden zwei Fragen durch Verwendung des Resolutionskalküls.
a) Ist der folgende Term erfüllbar?

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$$

*Lösungsvorschlag:*
Nein, Resolutionsgraph: b) Ist der folgende Term eine Tautologie?

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee \neg x_2$$

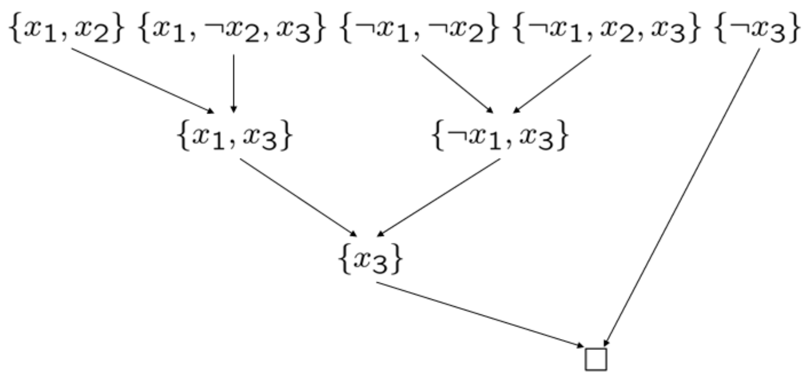
*Lösungsvorschlag:*
Es ist zu prüfen, ob der negierte Term $\mathcal{K} = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_2$ unerfüllbar ist (nach dem Satz der Aussagenlogik). Deduktion nach Resolutionslemma:
$\mathcal{K}_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3\}$ (Klausel aus $\mathcal{K}$)
$\mathcal{K}_2 = \{\neg x_1, x_3\}$ (Klausel aus $\mathcal{K}$)
$\mathcal{K}_3 = \{x_1, \neg x_3\}$ (Klausel aus $\mathcal{K}$)
$\mathcal{K}_4 = \{x_2\}$ (Klausel aus $\mathcal{K}$)
$\mathcal{K}_5 = \{\neg x_1, \neg x_2\}$ (Resolvent von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$)
$\mathcal{K}_6 = \{\neg x_2, \neg x_3\}$ (Resolvent von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_3$)
$\mathcal{K}_7 = \{\neg x_1, \neg x_3\}$ (Resolvent von $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_4$)
$\mathcal{K}_8 = \{\neg x_1\}$ (Resolvent von $\mathcal{K}_5$ und $\mathcal{K}_4$)
$\mathcal{K}_8 = \{\neg x_3\}$ (Resolvent von $\mathcal{K}_6$ und $\mathcal{K}_4$)
Man sieht, dass es keinen Ausweg aus diesem ≪Stau≫ gibt: Es werden keine neuen Terme gebildet. Dies bedeutet, dass $\mathcal{K}$ erfüllbar ist.

Alternativ: Der Term $\mathcal{K}$ stellt eine Hornformel dar (höchstens ein positives Literal pro Klausel). Äquivalente Implikationen-Darstellung:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \Rightarrow 0) \wedge (x_1 \Rightarrow x_3) \wedge (x_3 \Rightarrow x_1) \wedge (1 \Rightarrow x_2)$$

Effizienter Erfüllbarkeitstest (siehe Vorlesung 04.02. oder Schöning-Buch):
1. Markiere (setze auf 1) $x_2$.
2. Es gibt keine Klausel der Form $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \Rightarrow b$ (bzw. 0), bei der alle $a_i$ markiert und b nicht markiert sind.
3. Gib ≪erfüllbar≫ aus und stoppe. (Die erfüllende Belegung ist $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$).

Der gegebene Term ist also keine Tautologie.


$\{x_1, x_2\}$
$\{x_1, \neg x_2, x_3\}$
$\{\neg x_1, \neg x_2\}$
$\{\neg x_1, x_2, x_3\}$
$\{\neg x_3\}$
$\{x_1, x_3\}$
$\{\neg x_1, x_3\}$
$\{x_3\}$
$\square$