Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 15. Übungsblatt

Freiwillige Abgabe bis Dienstag, 10. Februar 2009, 14:00 Uhr
Sie können bis zu 2 Aufgaben von diesem Blatt abgeben, für zusätzliche Punkte.

100. Orthogonalisierung (5 Punkte)

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für den von den drei Vektoren $(2,-2,2,-2)$, $(2,1,0,-1)$, und $(0,0,2,-2)$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

101. Genmutationen (5 Punkte)

Für die Ausgangsfolge ATCGACTTACGCGATCGATC wird dreimal hintereinander folgende Operation ausgeführt: An einer zufälligen Stelle wird das vorhandene Symbol durch ein zufälliges *verschiedenes* Symbol aus dem Alphabet {C,G,T,A} ersetzt (in allen Fällen gleichverteilt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dadurch die Folge ATCGACTCCCGCGATCGATC entsteht?

102. Erwartungswert und Varianz (0 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Berechnen Sie den Erwartungswert (2 Punkte) und die Varianz (3 Punkte) für das *Produkt* der Augenzahlen.

103. Diskrete Wahrscheinlichkeit (5 Punkte)

Ein fairer Würfel wird geworfen. Wenn die Augenzahl ungerade ist, wird der Würfel noch einmal geworfen und die erreichte Augenzahl zur ersten dazuaddiert. Die Zufallsvariable X ist das Ergebnis der ersten Wurfs, falls er gerade ist, bzw. die Summe der beiden Würfe. Bestimmen Sie die Verteilung (2 Punkte), den Erwartungswert (1 Punkt), und die Varianz von X (2 Punkte).

104. Poisson-Verteilung (6 Punkte)

Ein Nachrichtenpuffer der Kapazität n wird jede Millisekunde geleert, und die enthaltenen Nachrichten werden verarbeitet. Wenn in einer Periode mehr als n Nachrichten ankommen, gehen die überzähligen Nachrichten verloren. Die Anzahl der Nachrichten, die in einer Millisekunde ankommen, ist Poisson-verteilt mit Mittelwert $\lambda = 5$.

(a) (3 Punkte) Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Periode der Puffer überläuft, höchstens 0,05 ist?

(b) (3 Punkte) Wie groß muss n sein, damit die *erwartete Anzahl* der verlorenen gegangenen Nachrichten pro Periode höchstens 0,05 ist?

105. Geometrische Zufallsgrößen (0 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichverteilung im Würfel $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Für einen zufälligen Punkt z im Würfel seien $R(z)$, $S(z)$ und $V(z)$ der Radius, die Oberfläche und das Volumen der größten Kugel im Würfel mit Mittelpunkt in z. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen und berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen dieser Zufallsvariablen.

106. Monotone Transformation von Zufallsvariablen (5 Punkte)

Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt auf dem Intervall $[1,4]$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion der Variablen $V = U^3$.

107. Verschiebungssatz für das zweite Moment (4 Punkte)

Beweisen Sie: Für eine Zufallsvariable X mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 gilt

$$E((X-a)^2) = \sigma^2 + (a-\mu)^2. \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

108. Tschebyscheff-Ungleichung (3 Punkte)

Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass bei 600 Würfen mit einem fairen Würfel mehr als 120-mal eine Sechs kommt.