Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 14. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 3. Feber 2009, 14:00 Uhr

---

87. Eigenwerte (5 Punkte)

    Wahr oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

    (a) Wenn A invertierbar ist und λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}.

    (b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda^2 - 3\lambda$ ein Eigenwert von $A^2 - 3A$.

    (c) Wenn λ ein gemeinsamer Eigenwert von A und von B ist, dann ist λ auch ein Eigenwert von $A + B$.

    (d) Wenn λ und μ zwei *verschiedene* Eigenwerte von A sind, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal zueinander.

    (e) Wenn A invertierbar ist, dann sind alle Eigenwerte von 0 verschieden.

88. Diagonalisierung (5 Punkte)

    (a) (2 Punkte) Diagonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ durch eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.

    (b) (1 Punkt) Berechnen Sie A^{100}.

    (c) (2 Punkte) Schreiben Sie eine Formel für das linke obere Element von A^n.

89. Exponentielles Wachstum (0 Punkte)

    Beweisen Sie, dass die Einträge der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Fibonacci-Folge $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bilden. Leiten Sie durch Diagonalisieren der Matrix eine exakte Formel für die Fibonacci-Zahlen her, und erklären Sie, was der Wachstumsfaktor $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$ mit den Eigenwerten der Matrix zu tun hat.

90. (0 Punkte) Ist das Produkt zweier symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch?

91. Mengenalgebren (0 Punkte)

    $\mathcal{F}$ sei eine Menge von Teilmengen einer Grundmenge Ω, die abgeschlossen unter Vereiningung und Komplement ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ dann auch unter Durchschnitt und Mengendifferenz abgeschlossen ist.

92. (a) Vereinigung von Ereignissen (3 Punkte)

    Die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes, fordert dass $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ für alle *disjunkten* Mengen A und B gilt. Zeigen Sie, dass daraus diese allgemeinere Regel folgt:

    $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie: Wenn zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, dann sind auch A und das Komplementärereignis $\bar{B}$ unabhängig.

93. Unabhängigkeit (0 Punkte)

    Es werden drei (unterschiedliche) Würfel geworfen, und das Ergebnis (die Augenzahl) sei W_1, W_2, W_3. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Ereignisse *paarweise* unabhängig sind, aber nicht *vollständig* unabhängig: A: $W_1 + W_2$ ist gerade. B: $W_1 + W_3$ ist gerade. C: $W_2 + W_3$ ist ungerade.

94. Eigenvektoren (0 Punkte)
    Bestimmen Sie eine (3×3)-Matrix mit *linken* Eigenvektoren $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (1,0,2)$, $\vec{v}_2 = (2,0,0)$, und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

95. Geometrische Wahrscheinlichkeit (0 Punkte)

    In einem Kreis mit Mittelpunkt O wird eine "zufällige" Sehne eingezeichnet.

    Modell A. Man wählt gleichverteilt einen Punkt P im Inneren des Kreises und nimmt die Sehne, deren Mittelpunkt P ist.

    Modell B. Man wählt gleichverteilt zwei Punkte A und B auf dem Rand des Kreises und nimmt die Sehne AB.

    Bestimmen Sie für jedes Modell die Wahrscheinlichkeit, dass AOB ein spitzwinkliges Dreieck ist.

96. Geometrische Wahrscheinlichkeit (5 Punkte)

    Es soll ein Punkt gleichverteilt aus dem Inneren des Einheitskreises gewählt werden.

    Methode I. Stelle den Punkt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ dar und wähle r und ϕ gleichverteilt im Intervall $r \in [0,1)$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.

    Methode II. Wähle zwei unabhängige gleichverteilte Zufallszahlen u und v in $[0,1)$ und nimm den Punkt $(x, y) = (\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v))$.

    Berechnen Sie für jede Methode die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt (a) im rechten oberen Viertelkreis, (b) im Kreis mit Radius $1/\sqrt{2}$ um den Mittelpunkt landet.

    Bei welcher Methode ist der gewählte Punkt gleichverteilt? (Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in eine Region des Kreises fällt, soll proportional zur Fläche sein.)

97. Dichte und Verteilungsfunktion (0 Punkte)

    (a) Eine Zufallsvariable X habe die Dichte $f_X(x) = 2x$ für $0 < x < 1$ und ansonsten sei die Dichte 0. Finden Sie die zugehörige Verteilungsfunktion von X.

    (b) Finden Sie für eine Zufallsvariable X mit der folgenden Verteilungsfunktion die Dichte, falls sie existiert:

    $$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x^2)}, & -\infty < x \leq 0\,, \\ \frac{1+2x^2}{2(1+x^2)}\,, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

    (c) Für welchen Wert von c ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

    $$F(x) := \int_{-\infty}^{x} c e^{-|t|}\, dt$$

98. Indikatorvariablen (0 Punkte)

    Die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ werden in eine zufällige Reihenfolge $a_1, \ldots, a_7$ gebracht. Bestimmen Sie den Erwartungswert für Anzahl Z der Elemente a_i, die größer als alle ihre Vorgängerelemente sind. (Beispiel: Für $\underline{4}, 2, 3, \underline{5}, 1, \underline{7}, 6$ ist $Z = 3$.)

    Anleitung: Die Zufallvariable X_i sei 1, falls a_i, größer als seine Vorgängerelemente ist, und 0 sonst. $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Was ist der Erwartungswert von X_i? (Die ersten i Elemente stehen in zufälliger Reihenfolge!) Verwenden Sie dann die Beziehung $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_7$.

99. Zufallsvariablen (0 Punkte)

    Wir würfeln, bis zweimal hintereinander eine Sechs kommt. Berechnen Sie die Verteilung, den Erwartungswert, und die Varianz für die Anzahl X der notwendigen Würfe.