Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 13. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 27. Jänner 2009, 14:00 Uhr

---

82. Der Vektorraum der stetigen Funktionen (0 Punkte)

    Auf der Menge V der auf dem Intervall $[0,1]$ definierten stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sind die Operationen der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit einem Skalar definiert. Das heißt, $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, für alle $x \in [0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

    (a) Zeigen Sie, dass V mit diesen beiden Operationen ein Vektorraum ist.

    (b) Zeigen Sie, dass auf V durch die folgende Formel ein Skalarprodukt definiert ist:

    $$\langle f, g\rangle = \int_{x=0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

    (c) Berechnen Sie die Norm von $u(x) = x^2$ und von $v(x) = 1 - x$ und den Winkel zwischen u und v.

    (d) Berechnen Sie die Projektion von u auf den von v aufgespannten Unterraum.

83. Permutationsmatrizen (5 Punkte). Eine $(n \times n)$-Matrix P, in der in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 steht, und wo alle übrigen Einträge 0 sind, heißt *Permutationsmatrix*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

    (a) (0 Punkte) Es gibt genau $n!$ Permutationsmatrizen der Größe $n \times n$.

    (b) (1 Punkt) Jede Permutationsmatrix ist eine orthogonale Matrix.

    (c) (0 Punkte) Die Inverse jeder Permutationsmatrix ist eine Permutationsmatrix.

    (d) (1 Punkt) Für jede Permutationsmatrix P gilt $P^{-1} = P$.

    (e) (1 Punkt) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ hat der Vektor Px die gleiche Summe der Elemente wie x.

    (f) (1 Punkt) Die Summe zweier Permutationsmatrizen ist eine Permutationsmatrix.

    (g) (1 Punkt) Das Produkt zweier Permutationsmatrizen ist eine Permutationsmatrix.

84. Eindeutige Zerlegung in komplementäre Unterräume (5 Punkte)

    U_1 und U_2 seien zwei Unterräume von V mit $\mathrm{Lin}(U_1 \cup U_2) = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie, dass jeder Vektor $x \in V$ auf eindeutige Art in $\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ mit $\vec{u}_1 \in U_1$ und $\vec{u}_2 \in U_2$ zerlegt werden kann.

85. Orthogonale Matrizen (5 Punkte). Beweisen Sie:

    (a) (2 Punkte) Jede orthogonale Matrix A muss Determinante $\det A = \pm 1$ haben.

    (b) (3 Punkte) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

86. Kegelschnitte und Hauptachsentransformation (5 Punkte)

    (a) (0 Punkte) Wie schaut die allgemeine Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r aus?

    (b) (0 Punkte) Welchen Mittelpunkt (x_M, y_M) und welchen Radius hat der Kreis mit der Gleichung $5x^2 + 5y^2 - 2x + 10y - 100 = 0$?

    Hinweis: Versuchen Sie, die Gleichung durch eine Variablentransformation $(\hat{x}, \hat{y}) = (x - x_M, y - y_M)$ in die Normalform von Aufgabe (a) zu transformieren.

    (c) (2 Punkte) Welchen Mittelpunkt hat die Ellipse mit der folgenden Gleichung?

    $$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 10y - 100 = 0$$

    (d) (2 Punkte) In welche Richtung zeigen die Achsen der Ellipse, und welche Längen haben sie? (Ein Taschenrechner ist hilfreich.)

    (e) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Ellipse im x-y-Koordinatensystem.