Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 12. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 20. Jänner 2009, 14:00 Uhr

78. "Skalarprodukt" in endlichen Körpern (5 Punkte).

    Im Vektorraum $V = \mathbb{Z}_2^n$ kann man analog zu reellen Vektorräumen folgende Abbildung $V \times V \to \mathbb{Z}_2$ definieren: (Alle Operationen sind modulo 2 durchzuführen.)

    $$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

    So überträgt man Begriffe wie Orthogonalität und orthogonales Komplement auf V.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2^4$ eine Basis für das orthogonale Komplement des durch $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ und $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$ aufgespannten Unterraums.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass in einem reellen Vektorraum mit Skalarprodukt ein von 0 verschiedener Vektor niemals zu sich selbst orthogonal sein kann. Zeigen Sie, dass in V ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal sein kann.

    (c) (1 Punkt) Gilt der Satz von der eindeutigen Zerlegung $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ eines Vektors $\vec{x}$ in eine Komponente $\vec{u}$ aus einem vorgegebenen Unterraum U und eine Komponente $\vec{v} \in U^\perp$ auch in V? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

    (d) (0 Punkte) Welche anderen Begriffe im Zusammenhang mit euklidischen Vektorräumen lassen sich auf V übertragen und welche lassen sich nicht übertragen?

79. (a) Isometrien (3 Punkte)

    Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W mit Skalarprodukt eine Isometrie ist, wenn sie die Normen erhält:

    $$\|f(x)\| = \|x\|\,, \text{ für alle } x \in V$$

    (Hinweis: Durch Betrachten von $\|u - v\|^2$ sieht man, wie sich das Skalarprodukt durch die Norm ausdrücken lässt.)

    (b) (0 Punkte) Ist jede Abbildung, die den Winkel zwischen zwei Vektoren erhält, eine Isometrie?

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass f genau dann eine Isometrie ist, wenn sie Orthogonalität erhält und für mindestens einen Vektor $x_0 \neq \vec{0}$ die Norm erhält.

    $$\langle f(x), f(y) \rangle = 0 \iff \langle x, y \rangle = 0, \text{ für alle } x, y \in V; \text{ und } \|f(x_0)\| = \|x_0\|$$

80. Orthogonale Projektion (5 Punkte). Im $\mathbb{R}^3$ sei durch der durch die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$ und $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1)$ aufgespannte Unterraum U gegeben.

    (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Projektion $p_U(\vec{x})$ von $\vec{x} = (1, 0, 0)$ auf U.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen sie die Matrix der Projektionsabbildung $p_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

81. Orthogonale Matrizen (5 Punkte)

    Eine *orthogonale Matrix* ist eine quadratische Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zwei orthogonale Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A = +1$ und $\det B = -1$. Worin unterscheiden sich die durch A und B gegebenen Abbildungen? (Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung der Abbildungen auf ein Dreieck.)

    (c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler 2×2-Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ist.