Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 10. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 6. Jänner 2009, 14:00 Uhr

64. Endliche Körper (0 Punkte)

    Erstellen Sie eine Additionstabelle und eine Multiplikationstabelle für die Restklassen modulo 8. Warum bilden diese beiden Operationen keinen Körper auf $\mathbb{Z}_8$? Welche Körperaxiome gelten, und welche Körperaxiome sind verletzt?

65. Simultane Kongruenzen (0 Punkte)

    Bestimmen Sie alle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

    (a) $x \equiv -1 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 7$

    (b) $y \equiv 3 \pmod{11}$, $y \equiv 7 \pmod{13}$, $y \equiv 11 \pmod{17}$

    (c) $z \equiv 1 \pmod 2$, $z \equiv 2 \pmod 3$, $z \equiv 3 \pmod 4$

66. Potenzen von Restklassen (5 Punkte)

    Berechnen Sie $2^{10000} \bmod 41$, $2^{(10^6)} \bmod 101$, $(-2)^{1000} \bmod 88$, $95^{-96} \bmod 97$, und $89^{-90} \bmod 91$.

67. Matrizen über endliche Körpern (5 Punkte)

    Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ die inverse Matrix A^{-1} zu

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

68. Gleichungen über $\mathbb{Z}_2$ (0 Punkte)

    Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{Z}_2^5$:

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

69. Erzeugung einer Prüfmatrix (5 Punkte)

    Bestimmen Sie reelle Matrizen B_1, B_2, sodass $\ker B_1 = \operatorname{im} A_1$ und $\ker B_2 = \operatorname{im} A_2$ ist.

    $$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

70. Fehlerkorrigierende Codes (5 Punkte)

    (a) (2 Punkte) Wie viele Fehler kann der Code $C = \{00100, 10001, 01010, 11111\}$ erkennen? Wie viele Fehler kann er korrigieren?

    (b) (3 Punkte) Wie viele Fehler kann der durch die obige Erzeugermatrix G gegebene lineare Code $C \subset \mathbb{Z}_2^6$ erkennen? Wie viele Fehler kann er korrigieren?

71. Iteration (0 Punkte)

    Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \ldots, A^kv$ linear unabhängig sind, wenn $A^kv \neq 0$ und $A^{k+1}v = 0$ ist.