Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 8. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 9. Dezember 2008, 14:00 Uhr

---

50. Blockmatrizen (5 Punkte)

    (a) (1 Punkt) Berechnen Sie

    $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

    und die zum Produkt inverse Matrix.

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für eine quadratische Blockmatrix der Form

    $$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

    mit invertierbaren quadratischen Untermatrizen A, B die folgende Beziehung gilt:

    $$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

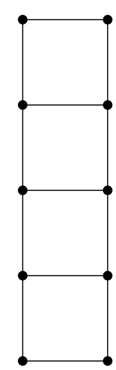
    (c) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass eine quadratische Blockmatrix D in der obigen Form nicht invertierbar ist, wenn die Blöcke A und B nicht quadratisch sind.

51. Produkt von transponierten Matrizen (0 Punkte)
    Beweisen Sie $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. Für eine invertierbare Matrix A gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

52. Orientierungstest (5 Punkte)

    Wie kann man mit Hilfe von Orientierungstests für Dreiecke feststellen, ob vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die Ecken eines konvexen Vierecks im Gegenuhrzeigersinn bilden?

53. Iteration (5 Punkte)

    Die Anzahl x_n der Spannbäume in der Leiter L_n mit n Sprossen und die Anzahl y_n der aufspannenden Wälder von L_n aus 2 Bäumen, bei denen die beiden obersten Knoten in verschiedenen Komponenten liegen, kann durch die Rekursion

    $$x_{n+1} = 3x_n + y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n + y_n$$

    mit den Anfangswerten $x_1 = y_1 = 1$ berechnet werden. Die Abbildung rechts zeigt L_5. Schreiben Sie die Rekursionsgleichung mit Hilfe einer Matrix. Berechnen sie den Vektor (x_n, y_n) für $n = 1, \ldots, 100$. Beschreiben Sie das Verhalten dieses Vektors bei wachsendem n.

54. Determinanten (5 Punkte)

    Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen invertierbar?

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \\ 6 & 7 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & x \\ x & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ x & 2 & x & 1 \\ 5 & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

55. Determinanten und Rang (0 Punkte)
    Beweisen Sie:

    (a) Aus einer Matrix vom Rang r kann man durch Streichen von Zeilen und Spalten eine $(r \times r)$-Untermatrix B mit $\det B \neq 0$ erzeugen.

    (b) Wenn eine Matrix A eine $(r \times r)$-Untermatrix B, (die durch Streichen von beliebigen Zeilen und Spalten entsteht), mit $\det B \neq 0$ enthält, dann ist $\operatorname{rg} A \geq r$.