Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 7. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 2. Dezember 2008, 14:00 Uhr

---

44. Elementare Umformungen (0 Punkte)
    Begründen Sie, warum man eine $n \times n$-Matrix vom Rang n nur mit elementaren Zeilenoperationen und ohne Spaltenoperationen in obere Dreiecksform überführen kann.

45. (a) Lineare Rekursion (0 Punkte)
    Die unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sei durch die folgende Rekursion gegeben.

    $$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ für } n \geq 2, \quad x_0 = 3,\ x_1 = 1$$

    Berechnen Sie $x_2, x_3, \ldots, x_8$. Stellen Sie die Matrix A auf, die durch die Formel $\vec{u}_n = A \cdot \vec{u}_{n-1}$ den Vektor $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ aus dem Vektor $\vec{u}_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ berechnet.

    (b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die entsprechende 3×3-Matrix A für die Rekursion

    $$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 5y_{n-3}$$

    und bestimmen Sie dazu die inverse Matrix A^{-1}.

46. (4 Punkte) Für welche reellen Werte von x hat die folgende Matrix Rang 2?

    $$\begin{pmatrix} 1 & x & -2 \\ 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

47. Inverse Matrix (6 Punkte, korrigierte Fassung von Matrix B)
    Invertieren Sie folgende Matrizen durch Nutzung von elementaren Zeilenumformungen.

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } |a| \neq 1; \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad \neq bc$$

48. Determinanten (0 Punkte)
    Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

    (a) $\det(A + B) = \det A + \det B$
    (b) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$
    (c) $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$
    (d) Aus $\det A = 1$ folgt $A = E_n$.
    (e) Wenn $\det A = 1$ ist, dann gehört A zu einer umkehrbaren Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

49. Determinanten (5 Punkte)

    (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 1$ für $i + j = n + 1$, und $a_{ij} = 0$ sonst. Das heißt, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für eine quadratische Blockmatrix der Form

    $$D = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

    mit quadratischen Untermatrizen A, B, C die Gleichung $\det D = \det A \cdot \det B \cdot \det C$ gilt. In der obigen Darstellung steht 0 für Nullmatrizen passender Größe.