

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 6. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 25. November 2008, 14:00 Uhr

38. (5 Punkte, Wiederholung vom 5. Blatt) Schreiben Sie die folgende 3×3 -Matrix als Produkt von Elementarmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

39. Kern und Bild (0 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für die 4×4 -Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ eine Basis des Kerns.

- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes.

(c) Welche Dimension hat der von den Vektoren $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugte

Unterraum?

40. Gleichungssysteme (5 Punkte)

Im \mathbb{R}^4 ist der Unterraum $U = \text{Lin}((2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6))$ gegeben. Konstruieren Sie ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten, dessen Lösungsmenge $U + (1, 0, 1, -2)$ ist.

41. Lineare Gleichungssysteme (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\text{Lös}(A | \vec{b})$ und $\text{Lös}(A | \vec{c})$ der Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

42. Lösbarkeit (0 Punkte)

Untersuchen Sie für die drei Fälle $m < n$, $m = n$, und $m > n$, ob die folgende Aussage richtig ist (Beweis oder Gegenbeispiel):

Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gilt: Wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung hat, muss auch $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eine Lösung haben.

43. Modellierung mit linearen Gleichungssystemen (4 Punkte)

Von einer natürlichen Zahl n sei über die Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ das Folgende bekannt:

- Es treten nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 auf und die Summe aller Primfaktoren ist 41.
- Genau die Hälfte der Primfaktoren ist 2.
- Der Faktor 3 tritt genau einmal öfter auf als der Faktor 5.

Bestimmen Sie alle Zahlen n mit den genannten Eigenschaften. Verwenden Sie ein lineares Gleichungssystem zur Lösung des Problems.