Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 5. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 18. November 2008, 14:00 Uhr (Aufgabe 38 eine Woche später)

32. (5 Punkte) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist durch folgende Matrix gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis B_1 von $\ker f$ und erweitern Sie sie zu einer Basis B von $\mathbb{R}^4$. Prüfen Sie nach, dass die Bilder der Ergänzungsvektoren $B \setminus B_1$ eine Basis für $\operatorname{im} f$ bilden.

33. Rang (0 Punkte)

Die einer $m\times n$-Matrix A entsprechende Abbildung bezeichnen wir mit $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gilt für zwei Matrizen A und B immer $\operatorname{im} f_{A+B} = \operatorname{im} f_A + \operatorname{im} f_B$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

34. Rang (4 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) (4 Punkte) Wenn man einen einzelnem Eintrag einer Matrix ändert, dann steigt der Rang höchstens um 1.

(b) (0 Punkte) Wenn man einen einzelnem Eintrag einer Matrix ändert, dann verminderst sich der Rang höchstens um 1.

(Hinweis: Suchen Sie aus den verschiedenen äquivalenten Charakterisierungen des Ranges eine geeignete aus.)

35. (0 Punkte) Beweisen Sie:

$$\operatorname{rg}(A+B) \le \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$$

36. Obere Dreiecksform (6 Punkte)

Bestimmen den Rang der folgenden Matrizen durch Überführung in obere Dreiecksform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

37. Matrixmultiplikation (0 Punkte)

Bestimmen Sie alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = B \cdot A$, wobei A die folgende Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende 3×3-Matrix als Produkt von Elementarmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$