Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 4. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 11. November 2008, 14:00 Uhr

25. Verknüpfung linearer Abbildungen (5 Punkte)

    Beweisen Sie direkt aus den Definitionen:

    (a) (3 Punkte) Die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen ist eine lineare Abbildung

    (b) (2 Punkte) Wenn zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ die Umkehrabbildung $g\colon W \to V$ mit $g(f(v)) = v$ für alle $v \in V$ und $f(g(w)) = w$ für alle $w \in W$ existiert (wenn f also *bijektiv* ist), dann ist g ebenfalls eine lineare Abbildung.

26. (0 Punkte) Wie viele Multiplikationen und Additionen muss man beim Berechnen des Matrizenprodukts $A \cdot B$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ durchführen?

27. (0 Punkte) Beweisen Sie, dass die Matrizen $\mathbb{R}^{m\times n}$ einen Vektorraum bilden (bezüglich der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar). Was ist die Dimension dieses Vektorraumes? Bestimmen Sie eine Basis.

28. Matrizen und komplexe Zahlen (5 Punkte)

    (a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Summe und das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wieder eine Matrix dieser Gestalt ist.

    (b) (2 Punkte) Die Matrizen dieser Form bilden einen Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis dieses Vektorraums.

    (c) (0 Punkte) Wenn man die Matrix in (a) mit der komplexen Zahl $a+bi$ identifiziert, dann entspricht die Addition und Multiplikation von Matrizen der Addition und Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen. (Die Matrizen der Gestalt in (a) bilden einen Körper, der zum Körper der komplexen Zahlen *isomorph* ist.)

29. (4 Punkte) Die Werte der linearen Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien auf folgender Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ gegeben:

    (a) auf allen ganzzahligen Vektoren $\mathbb{Z}^2$

    (b) auf den Vektoren $(1, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $(-3, -3)$

    (c) auf den Vektoren $(1, 1)$, $(\sqrt{2}, 2)$ und $(\sqrt{3}, 3)$

    (d) auf den Vektoren $(-1, 0)$ und $(1, 1)$

    Ist dadurch die Funktion g eindeutig festgelegt? Wie kann man $g((2, 4))$ durch die gegebenen Werte ausdrücken?

30. Matrizenpotenzen (4 Punkte)

    Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

    Beweisen Sie Ihre Formel durch vollständige Induktion. Gilt Ihr Ergebnis auch für negative $n \in \mathbb{Z}$?

31. Lineare Hülle (0 Punkte)

    Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? (Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.)

    Wenn $\vec{x} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\})$ und $\vec{y} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})$ ist,
    dann ist $\vec{x} + \vec{y} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \ldots, \vec{u}_k + \vec{v}_k\})$.