## Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 3. Übungsblatt

Abgabe Montag, 3. November 2008, 12:00 Uhr

---

18. Paarweise Unabhängkeit (0 Punkte)

    Gegeben seien 3 Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, die paarweise linear unabhängig sind. Folgt daraus, dass die drei Vektoren $x, y, z$ insgesamt linear unabhängig sind? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

19. Unterraum und Dimension (6 Punkte)

    Im reellen Vektorraum $\mathbf{R}^4$ seien die folgenden Unterräume gegeben:

    $$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$$
    $$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

    Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von $U$, $W$, $U \cap W$, $U + W$.

20. Lineare Abbildungen (4 Punkte)

    Welche der folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear? Beweisen Sie, dass die Bedingungen der Definition linearer Abbildungen erfüllt sind, oder geben Sie ein Beispiel an, wo eine Bedingung der Definition verletzt ist.

    (a) $f(x, y) = (|x - y|, |y - x|)$
    (b) $g(x, y) = (2x - y, y - 2x)$
    (c) $h(x, y) = (x^2 + x, y - x)$
    (d) $j(x, y) = (x - y, 1 - x)$

21. Dimensionsformel (5 Punkte)

    Beweisen Sie: Wenn $U_1$ und $U_2$ zwei *verschiedene* $(n-1)$-dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind, dann ist

    $$\dim(U_1 \cap U_2) = n - 2.$$

22. Matrizenprodukt (4 Punkte)

    Wie viele Zeilen und Spalten muss die Matrix $X$ haben, damit die folgende Gleichung sinnvoll ist? Bestimmen Sie die Menge der Matrizen $X$, die die Gleichung lösen.

    $$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Matrizenprodukt (0 Punkte)

    (a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ wieder eine Matrix dieser Gestalt ist.
    (c) Hat das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die gleiche Gestalt?

24. Matrizenpotenzen (0 Punkte)

    Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$