

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09

Nachklausur

Jede Aufgabe hat 5 Punkte. Abgabe bis Dienstag, 7. April 2009, 13:45 Uhr

1. Lineare Gleichungen

Für welche $z \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ z-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$? Für welche $z \in \mathbb{R}$ hat es eine eindeutige Lösung? (Die Lösung selbst ist nicht gefragt.)

2. Lineare Codes

Wie viele Elemente hat der durch die Erzeugermatrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Code $C \subset \mathbb{Z}_2^5$? Bestimmen Sie eine Prüfmatrix. Berechnen Sie die Informationsrate.

3. Transponierte Matrizen

Sind die folgenden Aussagen für alle Matrizen passender Größe wahr? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antworten, oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

- (a) $A^t \cdot B^t \cdot C^t = (A \cdot B \cdot C)^t$
- (b) $A^t + B^t = (B + A)^t$
- (c) $\text{rg } A + \text{rg } A^t = \text{rg}(A + A^t)$
- (d) $(A + A^t)^t = A + A^t$
- (e) Die Matrix $S = A - A^t$ ist schiefsymmetrisch. (Das heißt, $S^t = -S$.)

4. Wahrscheinlichkeit.

- (a) Zwei Würfel werden geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 10 ist.
- (b) Wenn die Augensumme von zwei Würfel mindestens 11 oder höchstens 3 ist, gewinnt ein Spieler den Wert der Augensumme (in Euro), andernfalls gewinnt er nichts. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns.

5. Orthogonalisierung

Berechnen Sie für den von den 3 Vektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraum des \mathbb{R}^4 eine Orthonormalbasis.

6. Orientierungstest

Überprüfen Sie *rechnerisch*, ob das Dreieck $P_1P_2P_3$ mit $P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.